



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
E INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS

NATHALIA AGOSTINHO BATALHA

**MODELAGEM LINEAR ELÁSTICA PARA SIMULAÇÃO DO  
ESTADO DE TENSÃO EM POÇOS DE PETRÓLEO  
INCLINADOS**

CAMPINAS

2017

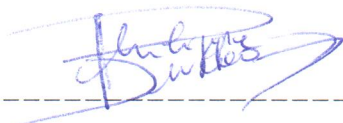
NATHALIA AGOSTINHO BATALHA

**MODELAGEM LINEAR ELÁSTICA PARA SIMULAÇÃO DO  
ESTADO DE TENSÃO EM POÇOS DE PETRÓLEO  
INCLINADOS**

Dissertação de Mestrado apresentada à Faculdade de Engenharia Mecânica e Instituto de Geociências da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para obtenção do título de Mestre em Ciências e Engenharia de Petróleo, na área de Exploração.

Orientador: Prof. Dr. Philippe Remy Bernard Devloo

Este exemplar corresponde à versão final da Dissertação defendida pela aluna Nathalia Agostinho Batalha e orientada pelo Prof. Dr. Philippe Remy Bernard Devloo.



Prof. Dr. Philippe Remy Bernard Devloo

CAMPINAS

2017



**Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s):** CAPES, 33003017

Ficha catalográfica  
Universidade Estadual de Campinas  
Biblioteca da Área de Engenharia e Arquitetura  
Luciana Pietrosanto Milla - CRB 8/8129

B311m Batalha, Nathalia Agostinho, 1988-  
Modelagem linear elástica para simulação do estado de tensão em poços de petróleo inclinados / Nathalia Agostinho Batalha. – Campinas, SP : [s.n.], 2017.

Orientador: Philippe Remy Bernard Devloo.  
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Poços de petróleo. 2. Elasticidade. 3. Método dos elementos finitos. I. Devloo, Philippe Remy Bernard, 1958-. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

**Título em outro idioma:** Linear elastic model for the simulation of the stress state in inclined wellbores

**Palavras-chave em inglês:**

Oil wells

Elasticity

Finite element method

**Área de concentração:** Exploração

**Titulação:** Mestra em Ciências e Engenharia de Petróleo

**Banca examinadora:**

Philippe Remy Bernard Devloo [Orientador]

Renato Pavanello

Luiz Carlos Marcos Vieira Junior

**Data de defesa:** 23-02-2017

**Programa de Pós-Graduação:** Ciências e Engenharia de Petróleo

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
E INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADÊMICO

**MODELAGEM LINEAR ELÁSTICA PARA SIMULAÇÃO DO  
ESTADO DE TENSÃO EM POÇOS DE PETRÓLEO  
INCLINADOS**

Autor: Nathalia Agostinho Batalha

Orientador: Prof. Dr. Philippe Remy Bernard Devloo

A Banca Examinadora composta pelos membros abaixo aprovou esta Dissertação:

Prof. Dr. Philippe Remy Bernard Devloo, Presidente  
FEC / UNICAMP

Prof. Dr. Renato Pavanello  
FEM / UNICAMP

Prof. Dr. Luiz Carlos Marcos Vieira Junior  
FEC / UNICAMP

Campinas, 23 de Fevereiro de 2017.

# Agradecimentos

Gostaria de agradecer à todos que colaboraram direta ou indiretamente no desenvolvimento deste trabalho. Ao meu orientador, Professor Philippe, pela motivação, amizade e todo o conhecimento transmitido. Aos meus colegas do LabMeC, pela amizade e por sempre compartilharem seus conhecimentos. Ao colega Omar, por toda sua ajuda e ensino. Aos meus pais, Renato e Elisabete, pela compreensão, suporte e confiança. Ao meu companheiro Arthur, pela ajuda, pelo carinho e apoio em todos os momentos.

## Resumo

Uma das maiores preocupações nas operações de perfuração é a estabilidade de poços. Prisão de coluna, colapso do poço, aumento da cavidade, fratura da formação, aumento no tempo operacional e gastos substanciais, são algumas das consequências causadas por poços instáveis. A perfuração através de uma formação afeta o estado de tensão do meio pré-existente. Apesar da lama de perfuração sustentar temporariamente a parede do poço durante a perfuração, uma inevitável redistribuição das tensões ocorre ao redor da cavidade. Esse novo estado de tensão pode ocasionar falhas na rocha. A resposta da formação após a perfuração é ainda menos favorável quando se trata de poços inclinados. Desse modo, uma modelagem numérica bi-dimensional foi desenvolvida para simular o estado de tensão ao redor de poços inclinados. O presente modelo assume comportamento isotrópico e linear elástico da rocha com estado plano de deformação. O modelo geomecânico foi elaborado utilizando o método de elementos finitos. O método foi implementado no ambiente NeoPZ, uma biblioteca de domínio público para o desenvolvimento de simulações de elementos finitos. A simulação permite ao usuário uma visão da solução sobre o plano perpendicular ao poço inclinado e/ou projetado sobre uma seção horizontal. O critério de falha de Sandler-DiMaggio foi selecionado para caracterizar a área plastificada da formação conforme a inclinação e direção do poço. A fim de melhorar a acurácia das simulações, é possível aumentar a ordem polinomial da aproximação e/ou o número de elementos. A solução numérica demonstrou taxas de convergência ótimas.

**Palavras-chave:** poços inclinados, estado de tensão, elasticidade, modelagem numérica, método dos elementos finitos.

## Abstract

One of the greatest concerns in drilling operations is wellbore stability. Stuck pipe, hole collapse, cavity enlargement, formation fracturing, time loss and substantial expenditures are some of the consequences caused by unstable wells. Drilling through a formation affects its state of stress. Although the drilling mud temporarily supports the borehole wall during the operation, an unavoidable new stress distribution occurs around the cavity. This new state of stress may lead to rock failure. The formation response after drilling is even less favorable when dealing with inclined wellbores. Thus, a two-dimension numerical modeling was developed to simulate stress state around inclined wells. The present model assumes linear elastic and isotropic rock material behavior with plane strain state. This geomechanical model was elaborated using the finite elements method. The method was implemented in the NeoPZ environment, which is an open-source library for the development of finite element simulations. The simulation provides the user a view of the solution over the plane perpendicular to the inclined hole and/or projected over a horizontal cross section. The Sandler-Dimaggio yield criterion was selected to describe the formation yield surface according to wellbore inclination and direction. In order to improve the accuracy of the simulation, it is possible to increase the polynomial order of the approximation and/or the number of elements. The numerical solution demonstrated optimal convergence rates.

**Keywords:** inclined wellbores, state of stress, elasticity, numerical modeling, finite element method.

## Lista de Figuras

1	Representação das tensões <i>in-situ</i> atuando em um poço direcional, no detalhe um plano a ser simulado - Obtido de [45] . . . . .	24
2	Deslocamento dos pontos P e Q do corpo - Adaptado de [22] . . . . .	29
3	Vetores de tensões agindo nos lados opostos de uma mesma superfície. Adaptado de [43] . . . . .	32
4	Componentes de tensões em um ponto do material . . . . .	34
5	Igualdade das tensões de cisalhamento . . . . .	34
6	Mudança de observador, Adaptado de [21] . . . . .	35
7	Representação gráfica de tensões em sistema polar, Obtido de [3] . . . . .	36
8	Curva geral de um material elástico, Obtido de [41] . . . . .	43
9	Estado plano de tensão em placas finas, Adaptado de [5] . . . . .	46
10	Estado plano de deformação em corpos espessos, Adaptado de [5] . . . . .	48
11	Diagrama tensão-deformação, Obtido de [25] . . . . .	52
12	Modelo elastoplástico de Sandler-Dimaggio, Obtido de [8] . . . . .	55
13	Direção do fluido de perfuração e carregamentos dentro de um poço - Adaptado de [40] . . . . .	58
14	Gradiente de pressões e “peso” de fluido equivalente do Campo Gullfaks no Mar do Norte - Adaptado de [17] e [42] . . . . .	59
15	Relação entre falhas e pressão da lama de perfuração - Obtido de [48] . . . . .	62
16	Tensões <i>in-situ</i> agindo sobre um elemento de rocha - Adaptado de [39] . . . . .	65
17	Configuração das tensões ao redor do poço, em coordenadas cilíndricas - Obtido de [34] . . . . .	66
18	Curvas da magnitude das tensões em função do afastamento do poço - Obtido de [34] . . . . .	67
19	Curva de ensaio uniaxial de rochas - Obtido de [34] . . . . .	68

20	Representação da inclinação e direção do poço - Obtido de [7] . . . . .	69
21	Quadrantes direcionais e medidas de compasso - Obtido de [7] . . . . .	70
22	Representação do sistema de coordenadas de um poço com os ângulos de direção e inclinação, (a) Poço vertical e (b) Poço Inclinado . . . . .	71
23	Discretização de um domínio em elementos finitos . . . . .	77
24	Malha bi-dimensional para o estado plano de deformação . . . . .	78
25	Mapeamento do elemento finito $\Omega_e$ no plano x, y para $\xi, \eta$ por meio da transformação $T_e$ - Obtido de [4] . . . . .	86
26	Funções de base de ordem 2 . . . . .	87
27	Gráfico log-log dos erros $\  \mathbf{e} \ _E$ e $\  \mathbf{e} \ _0$ de um problema modelo. Obtido de [4] .	88
28	Esquema da malha de elementos finitos ao redor do poço inclinado . . . . .	93
29	Refinamento da malha conforme o número de elementos . . . . .	93
30	Condições de Contorno . . . . .	94
31	Visualizações da solução na malha: (a) Malha perpendicular ao eixo do Poço e (b) Malha projetada em corte horizontal ao eixo do Poço . . . . .	95
32	Projeção de $\frac{1}{4}$ de malha: (a) Malha com coordenadas iniciais (em azul) e com uma dada direção e inclinação (em vermelho) (b) Representação de suas respectivas normais ao eixo do poço (c) Malha projetada sobre o plano horizontal (em preto)	97
33	Projeção de uma malha compelta: (a) Malha com coordenadas iniciais (em azul) e com direção e inclinação (em vermelho) com suas respectivas normais (b) Malha projetada sobre o plano horizontal (em preto) . . . . .	98
34	Fluxograma do código para a solução do modelo . . . . .	99
35	Representação das tensões horizontais e pressão interna do poço no plano bi-dimensional - Adaptado de [34] . . . . .	101
36	Exemplo de projeto típico utilizado em poços profundos - Adaptado de [34] . . .	102
37	Solução de $\sigma_x$ - (a) Visualização de toda a malha e (b) Visualização próxima ao poço . . . . .	103

38	Solução de $\sigma_y$ - (a) Visualização de toda a malha e (b) Visualização próxima ao poço . . . . .	103
39	Solução de $\sigma_z$ - (a) Visualização de toda a malha e (b) Visualização próxima ao poço . . . . .	103
40	Solução de $\tau_{xy}$ - (a) Visualização de toda a malha e (b) Visualização próxima ao poço . . . . .	104
41	Magnitude do deslocamento $\mathbf{u}$ - (a) Visualização de toda a malha e (b) Visualização próxima ao poço . . . . .	104
42	Linha de plotagem do gráfico sobre a malha . . . . .	105
43	Solução Aproximada (MEF) x Solução Analítica para a malha perpendicular ao eixo poço . . . . .	105
44	$\sigma_x$ projetado - (a) Visualização de toda a malha e (b) Visualização próxima ao poço	106
45	$\sigma_y$ projetado - (a) Visualização de toda a malha e (b) Visualização próxima ao poço	106
46	$\sigma_z$ projetado - (a) Visualização de toda a malha e (b) Visualização próxima ao poço	107
47	$\tau_{xy}$ projetado - (a) Visualização de toda a malha e (b) Visualização próxima ao poço . . . . .	107
48	Linha de plotagem do gráfico sobre a malha projetada . . . . .	108
49	Solução Aproximada (MEF) x Solução Analítica para a malha <b>projetada</b> no plano horizontal . . . . .	108
50	Vizualização das malhas inclinadas das soluções (a) $\sigma_x$ , (b) $\sigma_y$ , (c) $\sigma_z$ e (d) $\tau_{xy}$ em diferentes pontos de vista. . . . .	109
51	Vizualização das malhas inclinadas e projetadas das soluções (a) $\sigma_x$ , (b) $\sigma_y$ , (c) $\sigma_z$ e (d) $\tau_{xy}$ em diferentes pontos de vista. . . . .	110
52	Magnitude do deslocamento . . . . .	111
53	Plot magnitude do deslocamento sobre a malha . . . . .	112
54	Área plotada . . . . .	113
55	Tensões $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ Aproximada x Analítica- Ordem 1 e 2 . . . . .	113



56	Tensão $\tau_{xy}$ Aproximada x Analítica- Ordem 1 e 2 . . . . .	114
57	(a) Malha com $\left(\frac{L}{L_{circ}}\right) = 0.5$ , (b) $\left(\frac{L}{L_{circ}}\right) = 1.0$ , (c) $\left(\frac{L}{L_{circ}}\right) = 2.0$ . . . . .	115
58	Erro x Número de elementos radiais - Ordens 1 e 2, $\left(\frac{L}{L_{circ}}\right) = 0.5$ ; 1.0 e 1.5 ; 2 metros de raio externo . . . . .	116
59	Erro x Número de elementos radiais - Ordem 1, $\left(\frac{L}{L_{circ}}\right) = 0.5$ ; 1.0 e 1.5 ; 2 e 4 metros de raio externo . . . . .	117
60	Erro x Número de elementos radiais - Ordem 2, $\left(\frac{L}{L_{circ}}\right) = 0.5$ ; 1.0 e 1.5 ; 2 e 4 metros de raio externo . . . . .	117
61	Erro x Número de elementos circunferenciais - Ordens 1 e 2, $\left(\frac{L}{L_{circ}}\right) = 0.5$ ; 1.0 e 1.5 ; 2 metros de raio externo . . . . .	118
62	Erro x Número de elementos circunferenciais - Ordem 1, $\left(\frac{L}{L_{circ}}\right) = 0.5$ ; 1.0 e 1.5 ; 2 e 4 metros de raio externo . . . . .	119
63	Erro x Número de elementos circunferenciais - Ordem 2, $\left(\frac{L}{L_{circ}}\right) = 0.5$ ; 1.0 e 1.5 ; 2 e 4 metros de raio externo . . . . .	120
64	Gráfico log-log do erro em função de $h$ . . . . .	121
65	I1- (a) Modelo Elastoplástico, obtido de [8] (b) Modelo Linear Elástico . . . . .	123
66	J2- (a) Modelo Elastoplástico, obtido de [8] (b) Modelo Linear Elástico . . . . .	124
67	Função de Escoamento Plástico - (a) Modelo Elastoplástico, obtido de [8] (b) Modelo Linear Elástico . . . . .	124
68	I1- (a) Modelo Elastoplástico, obtido de [8] (b) Modelo Linear Elástico . . . . .	125
69	J2- (a) Modelo Elastoplástico, obtido de [8] (b) Modelo Linear Elástico . . . . .	125
70	Função de Escoamento Plástico - (a) Modelo Elastoplástico, obtido de [8] (b) Modelo Linear Elástico . . . . .	126
71	Função de Escoamento Plástico de acordo com o Modelo Linear Elástico para um Poço com Inclinação de 15, 30, 45 e 60 graus . . . . .	127
72	Função de Escoamento Plástico de acordo com o Modelo Linear Elástico para um Poço com Inclinação de 15 graus . . . . .	128

73	Função de Escoamento Plástico de acordo com o Modelo Linear Elástico para um Poço com Inclinação de 30 graus . . . . .	128
74	Função de Escoamento Plástico de acordo com o Modelo Linear Elástico para um Poço com Inclinação de 45 graus . . . . .	128
75	Função de Escoamento Plástico de acordo com o Modelo Linear Elástico para um Poço com Inclinação de 60 graus . . . . .	129
76	Função de Escoamento Plástico de acordo com o Modelo Linear Elástico para um Poço com Inclinação de 15 graus e Direção de 30 graus . . . . .	130
77	Função de Escoamento Plástico de acordo com o Modelo Linear Elástico para um Poço com Inclinação de 30 graus e Direção de 30 graus . . . . .	130
78	Função de Escoamento Plástico de acordo com o Modelo Linear Elástico para um Poço com Inclinação de 45 graus e Direção de 30 graus . . . . .	130
79	Função de Escoamento Plástico de acordo com o Modelo Linear Elástico para um Poço com Inclinação de 60 graus e Direção de 30 graus . . . . .	131
80	Função de Escoamento Plástico de acordo com o Modelo Linear Elástico para um Poço com Inclinação de 15 graus e Direção de 30 graus - Visualização Inclinada e Projetada . . . . .	131
81	Função de Escoamento Plástico de acordo com o Modelo Linear Elástico para um Poço com Inclinação de 30 graus e Direção de 30 graus - Visualização Inclinada e Projetada . . . . .	132
82	Função de Escoamento Plástico de acordo com o Modelo Linear Elástico para um Poço com Inclinação de 45 graus e Direção de 30 graus - Visualização Inclinada e Projetada . . . . .	132
83	Função de Escoamento Plástico de acordo com o Modelo Linear Elástico para um Poço com Inclinação de 60 graus e Direção de 30 graus - Visualização Inclinada e Projetada . . . . .	132
84	Densidade x Porosidade do arenito, dolomita e calcário, obtido de [39] . . . . .	141
85	Esquema de malha inclinada a 45 graus . . . . .	142

## Lista de Tabelas

1	Esquema de análise de estabilidade de poços - Obtido de [17] . . . . .	27
2	Dados de entrada das simulações . . . . .	100
3	Tensões iniciais locais ao eixo do poço inclinado do Exemplo 1 . . . . .	106
4	Taxas de convergência da aproximação para ordem 1 e 2 . . . . .	121
5	Parâmetros materiais do critério de Sandler-Dimaggio para um material carbonático, obtido de Cecílio [8] . . . . .	122
6	Parâmetros do modelo elastoplástico de Sandler-Dimaggio para um material carbonático, obtido de Cecílio [8] . . . . .	123
7	Parâmetros do modelo elastoplástico de Sandler-Dimaggio para um material carbonático, obtido de Cecílio [8] . . . . .	125
8	Valores típicos de módulo de Young das rochas mais comuns (em GPa). Obtido de [27] . . . . .	142
9	Valores típicos de coeficiente de Poisson das rochas mais comuns. Obtido de [27] . . . . .	143

## Lista de Abreviaturas e Siglas

$\mathbf{u}$  - vetor deslocamento

$\varepsilon$  - tensor de deformações

$\sigma$  - tensor de tensões

$\mathbf{f}_n$  - vetor de tensões

$m$  - massa de um corpo

$\vec{v}$  - vetor velocidade

$\mathbf{v}$  - vetor deslocamento

$a$  - aceleração

$\rho$  - densidade

$W_e$  - trabalho de forças externas

$W_i$  - trabalho de forças internas

$F_{el}$  - força elástica

$k$  - constante elástica da mola

$E$  - módulo de elasticidade

$\sigma_0$  - tensor de tensões iniciais

$\varepsilon_0$  - tensor de deformações iniciais

$C$  - matriz constitutiva de constantes elásticas

$\nu$  - coeficiente de Poisson

$P_w$  - pressão interna do poço

$\rho_w$  - densidade do fluido de perfuração

$g$  - constante gravitacional

$\sigma_{ov}$  - tensão de *overburden*

$\sigma_H$  - tensão *in-situ* horizontal maior

$\sigma_h$  - tensão *in-situ* horizontal menor

$\sigma_V$  - tensão *in-situ* vertical

$\sigma_r$  - tensão radial

$\sigma_\theta$  - tensão tangencial

$\alpha$  - direção/azimute do poço

$\beta$  - inclinação do poço

$\sigma_{InSitu}$  - tensor de tensões *in-situ*

$Q$  - matriz de rotação do poço inclinado

$\Omega_e$  - domínio do elemento

$\Omega$  - domínio computacional

$\Gamma$  - interface entre os elementos

$r_w$  - raio do poço

$r$  - raio de afastamento do poço

$\theta$  - posição ao redor da circunferência do poço

$\mathbf{b}$  - vetor de forças de corpo

$el_{circ}$  - número de elementos circulares

$el_{rad}$  - número de elementos radiais

$sz_{el}$  - comprimento do primeiro elemento

$q$  - progressão geométrica

$r_{length}$  - comprimento radial do domínio

$\frac{L}{L_{circ}}$  - proporção do primeiro elemento da malha

$\delta\Omega$  - contorno do domínio

$\phi$  - funções de base do método de elementos finitos

$K$  - matriz de rigidez

$F$  - vetor de carga

$p$  - ordem polinomial de aproximação do método de elementos finitos

$\mathbf{e}$  - erro de aproximação

$\Phi$  - função de escoamento

$\sigma_y$  - tensão de escoamento

$\dot{\epsilon}^p$  = deformação plástica

$F_1$  - função de plastificação 1

$F_2$  - função de plastificação 2

$J_2$  - segundo invariante do tensor deviatórico de tensões

$I_1$  - primeiro invariante do tensor de tensões

$\mathbf{I}$  - tensor identidade

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>22</b>
1.1	Motivação . . . . .	22
1.2	Objetivo . . . . .	23
<b>2</b>	<b>Revisão da Literatura</b>	<b>25</b>
2.1	Modelos Elásticos . . . . .	25
2.2	Outros Modelos . . . . .	26
2.3	Modelos de Estabilidade de Poços . . . . .	27
<b>3</b>	<b>Mecânica dos Sólidos Deformáveis</b>	<b>28</b>
3.1	Deformação infinitesimal - Descrição Lagrangiana . . . . .	29
3.2	Tensor de tensões de Cauchy . . . . .	31
3.2.1	Postulado de Cauchy . . . . .	32
3.2.2	O teorema de Cauchy e a representação matemática do tensor de tensões de Cauchy . . . . .	33
3.2.3	Mudança de observador . . . . .	35
3.2.4	Coordenadas cilíndricas . . . . .	36
3.3	Balanco do Momento - Equações de Equilíbrio . . . . .	37
3.4	Princípio do trabalho virtual (PTV) . . . . .	38
<b>4</b>	<b>Elasticidade Linear</b>	<b>42</b>
4.1	Lei de Hooke . . . . .	42
4.2	Elasticidade em materiais . . . . .	42
4.3	Relação tensão-deformação para um material linear elástico em três dimensões . .	43
4.3.1	Estado plano de tensão . . . . .	45
4.3.2	Estado plano de deformação . . . . .	47

<b>5</b>	<b>Plasticidade</b>	<b>52</b>
5.1	O critério de escoamento e a função de plastificação . . . . .	53
5.2	Critério de escoamento de Sandler-Dimaggio . . . . .	54
<b>6</b>	<b>Estabilidade de Poços na Perfuração</b>	<b>56</b>
6.1	O fluido de perfuração e a rocha . . . . .	57
6.1.1	Fluidos de Perfuração . . . . .	59
6.2	Tipos de Instabilidade de Poços . . . . .	60
6.2.1	Instabilidade Mecânica . . . . .	60
6.2.2	Instabilidade Química . . . . .	63
<b>7</b>	<b>Tensões atuantes na formação</b>	<b>64</b>
7.1	Tensões <i>in-situ</i> e tensões induzidas . . . . .	64
7.2	Tensões ao redor de um poço de petróleo . . . . .	65
7.3	Tensões atuantes na parede do poço em coordenadas cilíndricas . . . . .	66
7.3.1	Estado de tensão triaxial de um poço . . . . .	67
7.4	Ensaio uniaxial de uma amostra de rocha . . . . .	67
<b>8</b>	<b>Soluções analíticas para estado de tensões em poços de petróleo</b>	<b>69</b>
8.1	Direção e inclinação de um poço de petróleo . . . . .	69
8.2	Solução geral linear elástica . . . . .	70
8.2.1	Tensor de Tensões local ao eixo do poço . . . . .	71
8.2.2	Equações analíticas . . . . .	73
8.2.3	Equações analíticas em coordenadas cartesianas . . . . .	74



<b>9</b>	<b>Modelagem Linear Elástica do Estado de Tensão ao Redor de Poços de Petróleo Inclinação pelo Método de Elementos Finitos (MEF)</b>	<b>76</b>
9.1	O Método de Elementos Finitos . . . . .	76
9.2	Discretização do domínio . . . . .	76
9.3	Formulação variacional (2D) . . . . .	77
9.3.1	Formulação fraca para o deslocamento . . . . .	78
9.3.2	Implementação computacional da formulação variacional . . . . .	81
9.4	Aproximação de Galerkin . . . . .	82
9.5	Pós-processamento da solução . . . . .	84
9.6	Transformação do Elemento . . . . .	85
9.7	Funções de Base - Elementos Quadriláteros . . . . .	86
9.8	Taxas de Convergência . . . . .	87
<b>10</b>	<b>Implementação Computacional</b>	<b>90</b>
10.1	C++ . . . . .	90
10.2	NeoPZ: um ambiente orientado a objetos para simulação de elementos finitos . .	90
10.2.1	TPZElasticity2D . . . . .	91
10.2.2	TPZGraphEl - Pós processamento . . . . .	91
10.3	Malha . . . . .	92
10.4	Condições de Contorno . . . . .	94
10.4.1	Utilização da solução analítica como tensões iniciais e condição de contorno	94
10.5	Desprezando o efeito da gravidade . . . . .	95
10.6	Visualização Gráfica . . . . .	95
10.7	Fluxograma do código . . . . .	98

<b>11 Resultados e Discussões</b>	<b>100</b>
11.1 Exemplo 1 - Poço com inclinação de 30 graus e direção de 60 graus . . . . .	102
11.1.1 Visualização perpendicular ao eixo do poço . . . . .	102
11.1.2 Visualização projetada no plano horizontal . . . . .	106
11.2 Exemplo 2 - Visualização do plano inclinado e projetado - Poço com inclinação de 50 graus e direção de 30 graus . . . . .	109
11.2.1 Visualização da malha inclinada . . . . .	109
11.2.2 Visualização da malha inclinada e projetada . . . . .	110
<b>12 Verificação do Código</b>	<b>111</b>
12.1 Solução analítica como função de $\sigma_0$ e condições de contorno . . . . .	111
12.2 Aproximação da solução conforme ordem polinomial de aproximação . . . . .	112
12.3 Erro . . . . .	114
12.3.1 Caso 1 - Incremento do número de elementos radiais ( $el_{rad}$ ) . . . . .	115
12.3.2 Caso 2 - Incremento do número de elementos circunferenciais ( $el_{circ}$ ) . . . . .	118
12.4 Taxa de convergência . . . . .	121
<b>13 Visualização do critério de escoamento</b>	<b>122</b>
13.1 Caso 1 . . . . .	123
13.2 Caso 2 . . . . .	124
13.3 Caso 1 - Efeito da Inclinação . . . . .	126
13.4 Caso 2 - Efeito da Inclinação . . . . .	127
13.5 Caso 2 - Efeito da Inclinação e Direção . . . . .	129
13.6 Caso 2 - Efeito da Inclinação e Direção Visualização Inclinada e Projetada. . . . .	131
<b>14 Conclusão</b>	<b>134</b>
14.1 Trabalhos futuros . . . . .	135

<b>15 Apêndice</b>	<b>140</b>
15.1 Notação Matricial . . . . .	140
15.2 Coeficiente de Poisson . . . . .	141
15.3 Desprezando o efeito da gravidade . . . . .	141
15.4 Propriedades mecânicas de rochas . . . . .	142

# 1 Introdução

Poços inclinados são obtidos por meio da perfuração direcional. A perfuração direcional consiste no processo de direcionar um poço ao longo de uma trajetória para atingir um determinado alvo, [7]. O uso da perfuração direcional se tornou muito comum por diversos motivos, entre eles pode-se destacar os aspectos econômicos e ambientais. Obstruções naturais (montanhas), restrições ambientais (rios, aquíferos, zonas urbanas), e economia para se atingir vários alvos, são exemplos da necessidade pela perfuração direcional.

Sabendo da grande utilização desse tipo de perfuração, faz-se necessário o estudo e pesquisa para aprimoramento desse processo, a fim de garantir o sucesso e a segurança nas operações. Porém, muitos desafios cercam o processo da perfuração direcional, entre eles - e o que será abordado neste trabalho - está a estabilidade dos poços.

Perfurar um poço calibrado, ou seja, de diâmetro constante (diâmetro da broca), é essencial na exploração de petróleo. Um poço estável, com bom calibre, oferece maior segurança para o processo bem como a prevenção de problemas para futuras operações, como por exemplo a de cimentação. A estabilidade do poço, contudo, depende da interação entre as rochas e os fluidos de perfuração, e o estado de tensão das formações.

A janela operacional para um dado cenário pode variar de acordo com a inclinação do poço. Conforme poderá ser observado neste trabalho, poços inclinados podem exigir pressão interna de poço mais baixa quando comparada à poços verticais. Desse modo, conhecendo-se o estado de tensão do poço inclinado, é possível planejar e otimizar a pressão do fluido de perfuração de modo que a formação não ultrapasse seu limite de escoamento.

A simulação e análise do estado de tensão das formações na perfuração de poços verticais e inclinados, podem oferecer uma melhor compreensão do comportamento do material rochoso e contribuir para o projeto da perfuração, evitando acidentes, tempo e custos operacionais.

## 1.1 Motivação

A estabilidade de poços é uma das maiores preocupações nas operações de perfuração. Queda na taxa de penetração, prisão de coluna, perda de fluidos, colapso e consequente perda do poço, são alguns problemas operacionais que envolvem estabilidade de poços.

Durante a perfuração, as paredes do poço são temporariamente suportadas pelo fluido de perfuração. A densidade da lama de perfuração, deve ser alta o suficiente para prevenir *kicks* e fechamento do poço, mas baixa o suficiente para evitar fraturas hidráulicas, plastificação ao redor da parede do poço e perdas de fluido para dentro da formação, [47].

As rochas em torno do poço aberto se deformam devido ao alívio de tensões causado pela perfuração e de acordo com a pressão que o fluido de perfuração exerce sobre a parede do poço. Para o caso de rochas com comportamento linear elástico, as maiores perturbações das tensões ficam concentradas ao redor do poço. Em alguns casos, esse novo campo de tensões gerado pode ser desprezado, em outros casos contudo, pode ser significativo e gerar indesejáveis problemas operacionais como mencionado anteriormente, [19].

Para minimizar esses riscos, análises geomecânicas são realizadas no estágio de planejamento/projeto dos poços. Entre muitos fatores envolvidos na análise está o conhecimento das formações e suas profundidades, bem como a definição da trajetória do poço. Entender o campo de tensões dessas formações é essencial para a perfuração e completação de poços verticais, inclinados e horizontais.

Uma vez conhecido o campo de tensões ao redor do poço, torna-se possível definir na fase de planejamento/projeto de poços a pressão de fluido de perfuração mais viável a ser utilizada para um poço com uma dada inclinação e material rochoso.

## 1.2 Objetivo

Este trabalho tem como objetivo desenvolver um modelo numérico que simule o estado de tensão ao redor de poços inclinados após a perfuração.

Com poucos dados de entrada, o simulador retornará ao usuário a resposta elástica da formação em torno do poço. O simulador possui como diferencial o fornecimento da solução em um plano perpendicular ao eixo do mesmo e/ou projetado sobre um plano horizontal. Os dois planos disponíveis têm como finalidade atender diferentes análises de engenheiros e geólogos na fase de projeto e desenvolvimento do poço.

A utilização das equações analíticas como tensão inicial ao longo do domínio e como condição de contorno, tem como propósito verificar o código implementado e evitar efeitos de contorno em implementações de outros modelos, tais como o modelo elasto-plástico.

O critério de falha de Sandler-Dimaggio selecionado neste trabalho, tem como objetivo mostrar a área plastificada ao redor do poço inclinado. Variando-se a inclinação do poço, com ou sem direção/azimute, será possível visualizar o comportamento da função de plastificação em diferentes cenários. O critério de escoamento permite verificar a viabilidade do “peso” do fluido de perfuração utilizado, a partir da pressão exercida pelo mesmo no poço simulado.

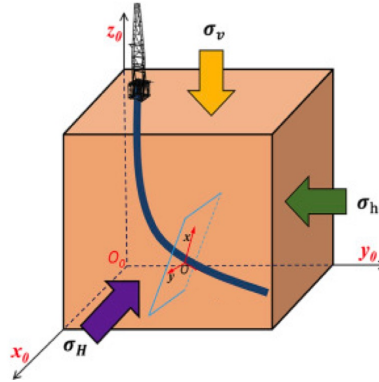


Figura 1: Representação das tensões *in-situ* atuando em um poço direcional, no detalhe um plano a ser simulado - Obtido de [45]

A Figura 1, apresenta um esquema de como as tensões *in-situ* atuam ao redor de um poço direcional. No detalhe é possível observar um plano bi-dimensional onde uma simulação poderá ser executada.

## 2 Revisão da Literatura

### 2.1 Modelos Elásticos

A primeira solução elástica desenvolvida para prever estabilidade de poços foi apresentada por Hubbert e Willis em 1957. Eles aplicaram a solução elástica de Kirsch para calcular a estabilidade de poços verticais sob tensões não-hidrostáticas no *farfield* e pressão de fluido constante no poço, [29], [44], [11].

Em 1968, Fairhurst apresentou uma solução para o estado de tensão ao redor de um poço inclinado. As equações de Fairhurst foram posteriormente adaptadas por Bradley em 1979, para a modelagem da distribuição das tensões em casos generalizados para poços desviados e não paralelos às direções das tensões principais. A solução derivada por Bradley não considera comportamento plástico ou não-linear, não considera efeitos de temperatura, eficiência da lama de perfuração, gradiente de pressão de poros, efeito de tempo ou anisotropia do material. Portanto, a solução de Bradley é utilizada apenas para análise linear-elástica simples. A grande contribuição de Bradley contudo, foi a avaliação da relação da estabilidade de poços conforme a direção e inclinação. Fjaer *et al* (2008), descrevem em seu livro que havia um erro de sinal na formulação de Bradley, o qual se propagou na literatura por muitos anos, inclusive na primeira edição de Fjaer *et al* (1992).

Conforme destacado por Xu *et al* (2004) e Ostadhassan *et al* (2014):

Santarelli e Brown (1987) investigaram a dependência tensão-módulo elástico para estabilidade de poços. Uma representação generalizada da lei de Hooke foi apresentada, utilizando uma variação do módulo de Young em função das tensões de confinamento. A solução foi derivada para poços verticais, em meios elásticos e com tensões horizontais isotrópicas.

A influência da anisotropia da rocha em poços inclinados foi apresentada por Aadnoy e Chenevert em 1987. Contudo, o modelo semi-analítico desenvolvido calculava apenas as tensões na parede do poço. Em 1993, Ong e Roegiers aperfeiçoaram o modelo de Aadnoy e Chenevert introduzindo a solução da tensão em função do raio do poço. Um critério de falha cisalhante também foi acrescentado ao modelo.

Um modelo de previsão das tensões, deslocamentos e iniciação de fraturas na parede de poços inclinados, foi desenvolvida por Roegiers e Detournay em 1988.

Em 1993, Mody e Hale apresentaram um modelo acoplando os efeitos químicos e mecânicos entre o fluido de perfuração e a formação.

Um modelo para inchamento de argilas foi apresentado por Sherwood e Bailey em 1994. O modelo se trata de uma modificação da teoria da poroelasticidade de Biot.

Devido à sua facilidade de manipulação e poucos dados requeridos, as soluções linear-elásticas são largamente utilizadas na indústria de óleo e gás para modelos de análise de estabilidade de poços, [44].

## 2.2 Outros Modelos

Modelos considerando fatores como poroelasticidade (Detournay e Cheng, 1988), poroviscoelasticidade (Abousleiman *et al*, 1995), elasticidade não linear (Addis e Wu 1993) e plasticidade (Ewy, 1993) foram propostos, [11].

Uma solução poroelástica foi derivada por Bratli em 1983 para poços verticais, em estado plano de deformação e campo de tensão não-hidrostático. Baseado na teoria da poroelasticidade, Cui *et al* (1997) apresentou uma solução analítica para poços inclinados em meio isotrópico também considerando estado plano de deformação. Um modelo thermoporomecânico totalmente acoplado foi apresentado por Li *et al* (1998), esse estudo identificou que a temperatura induz altas pressões de poros, podendo ocasionar instabilidade no poço. Uma solução analítica acoplando soluções térmicas e química poro-elásticas foi ainda apresentada por Ekbote *et al* em 2000 e 2001, [44].

Cecílio (2014), desenvolveu um modelo elastoplástico para estabilidade de poços verticais. O autor utilizou os modelos de Mohr-Coulomb e Sandler-DiMaggio para analisar a superfície de plastificação e possíveis *breakout* da formação. Entre suas grandes contribuições, pode-se destacar a visualização da superfície plastificada em geometria elíptica na cavidade do poço, na ocorrência de *breakout*.

Gnirk (1972) e Papamichos *et al* (1995) apresentaram modelos elastoplásticos e não-lineares – analíticos e semi-analíticos – para estabilidade de poços. Modelos poro-elastoplásticos que consideram comportamento elastoplástico da formação e efeitos de fluxo de fluidos também têm sido desenvolvidos, [29].



## 2.3 Modelos de Estabilidade de Poços

A Tabela 1 esquematiza uma análise completa de estabilidade de poços. Uma análise simples pode ser realizada considerando apenas a primeira linha da tabela. Uma análise mais abrangente e sofisticada pode envolver outros fatores listados como: análise química, térmica, plástica, no tempo, anisotropia, critérios de falha, etc.

O presente trabalho contudo, se limita a simular o estado de tensão ao redor dos poços inclinados. Portanto, o objetivo da simulação é representar graficamente a solução numérica da resposta elástica da formação quando submetida à pressão do fluido de perfuração. Desse modo, este projeto representa um passo fundamental na análise de estabilidade de poços, mas não realiza uma avaliação abrangente da estabilidade do poço simulado. Contudo, o simulador permite futuras melhorias e adaptações para possíveis análises mais complexas. Como exemplo de adaptação, pode-se citar a verificação da área plastificada da formação, que foi realizada neste trabalho com o modelo linear elástico, em diferentes cenários de poços inclinados.

Entre as contribuições deste estudo está a visualização do estado de tensão da formação no plano horizontal ao eixo do poço. Essa ferramenta tem como propósito contribuir nas análises de engenheiros e geólogos na fase de projetos.

O quadros vermelhos na Tabela 1 representam os fatores abordados neste trabalho.

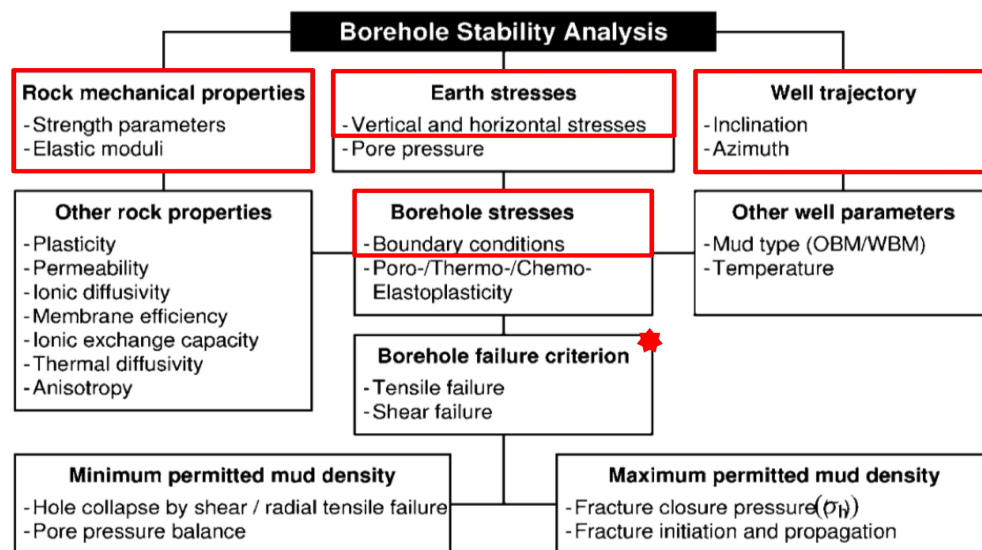


Tabela 1: Esquema de análise de estabilidade de poços - Obtido de [17]

### 3 Mecânica dos Sólidos Deformáveis

O estudo da mecânica dos sólidos tem como objetivo a determinação da deformação e das forças internas existentes em um corpo quando submetido à forças externas. Essa ciência, conforme apresentado por Parnes (2001), se baseia em:

1. Leis físicas que descrevem o comportamento dos sólidos de acordo com dados experimentais obtidos em laboratórios;
2. Deduções matemáticas para expressar essas leis, baseadas em hipóteses simplificadas.

As equações matemáticas são compostas por:

- Equações da mecânica (equações de equilíbrio) escritas em termos de forças e/ou tensões.
- Equações cinemáticas, que descrevem a geometria e deformação do corpo. Essas equações são escritas em termos de deslocamento dos pontos do corpo e envolvem deformação (*strain*).
- Equações constitutivas, que descrevem o comportamento mecânico geral do material e que são característicos dos materiais.

No estudo da mecânica do contínuo, a micro-escala (átomos, moléculas, etc) não é considerada, o material é dito estar distribuído continuamente em todos os pontos em um dado espaço.

Um corpo pode ser homogêneo e não-homogêneo. Um corpo é considerado intrinsecamente homogêneo se ele possuir as mesmas propriedades do material em todos os pontos desse corpo. Se o material se comportar diferentemente de um ponto à outro (em uma micro-escala), ele é dito não-homogêneo.

Para a análise do comportamento de um material em um dado ponto, ele é dito “isotrópico” se suas propriedades forem as mesmas em todas as direções. Caso contrário, se o material exibir comportamentos diferentes a depender da direção, ele é dito um material “anisotrópico”. A referência à esses materiais é dada em macro-escala, ou seja, é referente ao comportamento global dos materiais sujeitos à forças externas.

### 3.1 Deformação infinitesimal - Descrição Lagrangiana

A deformação de um corpo sólido pode ser definida como a variação da distância entre dois pontos arbitrários observados antes e após um deslocamento. O tensor de deformação de corpos que apresentam pequenos deslocamentos (matematicamente infinitesimais) será derivado nesta seção. Esse conceito se refere à muitos problemas de engenharia, como estruturas e máquinas por exemplo, em que o deslocamento de cada ponto do material é muito pequeno quando este é submetido à carregamentos, [22].

A descrição Lagrangiana apresentada a seguir, foi obtida de Lai *et al* (1993). Dado um corpo cuja configuração de referência no tempo  $t_0$  varia para uma diferente configuração no tempo  $t$ . Um ponto material  $P$  desse corpo sofre um deslocamento  $\mathbf{u}$ , chegando então à posição final  $\mathbf{x}$ , conforme pode-se observar na Figura 2:

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) \quad (1)$$

Verifica-se um ponto vizinho desse corpo “ $Q$ ” posicionado inicialmente em  $\mathbf{X} + d\mathbf{X}$  com posição final  $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$ , relacionando-se com  $\mathbf{X} + d\mathbf{X}$  por:

$$\mathbf{x} + d\mathbf{x} = \mathbf{X} + d\mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X} + d\mathbf{X}, t) \quad (2)$$

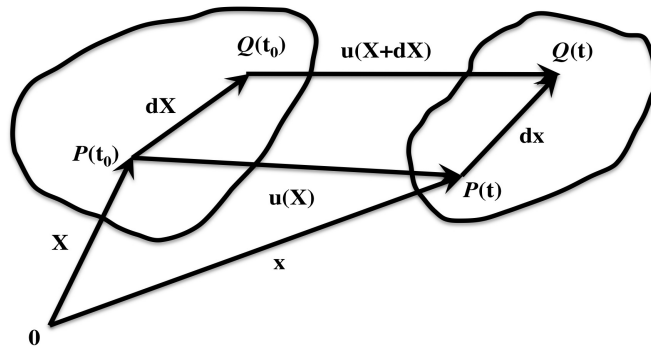


Figura 2: Deslocamento dos pontos P e Q do corpo - Adaptado de [22]

Subtraindo-se as Equações 1 e 2, chega-se a:

$$d\mathbf{x} = d\mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X} + d\mathbf{X}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) \quad (3)$$

Utilizando-se da definição [22] de que:

$$\mathbf{u}(\mathbf{X} + d\mathbf{X}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = (\nabla \mathbf{u})d\mathbf{X} \quad (4)$$

Tem-se portanto,

$$d\mathbf{x} = d\mathbf{X} + (\nabla \mathbf{u})d\mathbf{X} \quad (5)$$

Sendo  $\nabla \mathbf{u}$  o gradiente do deslocamento, matricialmente representado em coordenadas cartesianas por:

$$\nabla \mathbf{u}(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (6)$$

A Equação 5 pode ser escrita na forma:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{U}d\mathbf{X} \quad (7)$$

Sendo:

$$\mathbf{U} = \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u} \quad (8)$$

Para encontrar o comprimento de  $d\mathbf{x}$  e  $d\mathbf{X}$ , realiza-se o produto escalar entre eles mesmos:

$$d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = \mathbf{U} d\mathbf{X} \cdot \mathbf{U} d\mathbf{X} = d\mathbf{X} \cdot \mathbf{U}^T \mathbf{U} d\mathbf{X} \quad (9)$$

Definindo-se os comprimentos  $d\mathbf{x} = d\mathbf{s}$  e  $d\mathbf{X} = d\mathbf{S}$ ,

$$(d\mathbf{s})^2 = d\mathbf{X} \cdot \mathbf{U}^T \mathbf{U} d\mathbf{X} \quad (10)$$

Pode-se dizer que se  $\mathbf{U}$  é um tensor ortogonal, então  $\mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{I}$  e  $(d\mathbf{s})^2 = (d\mathbf{S})^2$ . Desse modo, um ortogonal  $\mathbf{U}$  corresponde a um movimento de corpo rígido.

Expandindo  $\mathbf{U}^T \mathbf{U}$  pela Equação 8, tem-se:

$$\mathbf{U}^T \mathbf{U} = (\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u})^T + (\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}) = \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T + (\nabla \mathbf{u})^T \nabla \mathbf{u} \quad (11)$$

Deve-se contudo, considerar apenas casos em que as componentes do vetor deslocamento e suas derivativas são muito pequenas. Portanto, a quantidade  $(\nabla \mathbf{u})^T \nabla \mathbf{u}$  é uma quantidade pequena de maior ordem comparada à  $\nabla \mathbf{u}$ . Então, nesse caso tem-se:

$$\mathbf{U}^T \mathbf{U} \simeq \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \equiv \mathbf{I} + 2\boldsymbol{\varepsilon} \quad (12)$$

Sendo  $\boldsymbol{\varepsilon}$  a parte simétrica de  $\nabla \mathbf{u}$ :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T] \quad (13)$$

Conclui-se portanto que o tensor  $\boldsymbol{\varepsilon}$  caracteriza a mudança de comprimento sofrida no contínuo por pequenas deformações. O tensor de deformação infinitesimal  $\boldsymbol{\varepsilon}$  pode ser matricialmente representado, em coordenadas cartesianas, por:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (14)$$

Ou, na notação:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \quad (15)$$

### 3.2 Tensor de tensões de Cauchy

Na mecânica dos contínuos, o tensor de tensões de Cauchy ( $\boldsymbol{\sigma}$ ) é um tensor de segunda ordem, nomeado com referência à Augustin-Louis Cauchy. Cauchy (1789-1857) foi um matemático francês reconhecido como um pioneiro e grande contribuinte da análise matemática, [43].

O tensor  $\sigma$  é composto por nove componentes as quais definem o estado de tensão em um ponto dentro de um material.

### 3.2.1 Postulado de Cauchy

De acordo com o postulado de Cauchy, a condição de equilíbrio deve ser respeitada em qualquer ponto da superfície externa de um sólido. Desse modo, se uma força  $\mathbf{f}$  é aplicada no contorno do sólido e  $\mathbf{n}$  representa a normal externa da superfície, então, em qualquer ponto dessa superfície externa tem-se, [9]:

$$\mathbf{f}_n = \sigma \mathbf{n} \quad (16)$$

Como consequência ao postulado, tem-se o teorema recíproco de Cauchy, o qual afirma que os vetores de tensões que agem nos lados opostos de uma mesma superfície, são iguais em magnitude porém opostos em suas direções, conforme ilustrado na Figura 3.

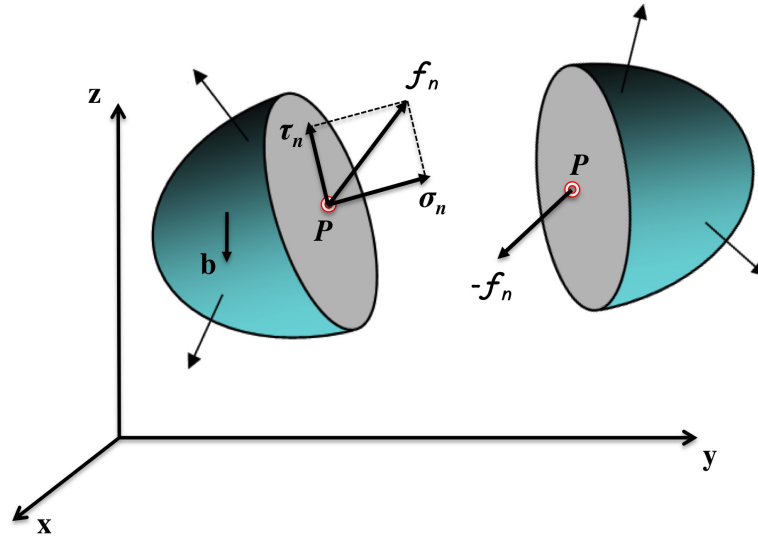


Figura 3: Vetores de tensões agindo nos lados opostos de uma mesma superfície. Adaptado de [43]

### 3.2.2 O teorema de Cauchy e a representação matemática do tensor de tensões de Cauchy

O estado de tensões em um ponto material de um corpo, é definido por todos os vetores de tensão  $\mathbf{f}_n$  associados aos planos que passam por um mesmo ponto ( $P$ ). Segundo o teorema de Cauchy, conhecendo-se os vetores de tensão em três planos mutualmente perpendiculares, é possível determinar o vetor de tensões sobre qualquer outro plano desde que também passe pelo mesmo ponto. Essa relação é determinada por meio de equações de transformação de coordenadas.

Em outras palavras, o vetor de tensões em um dado ponto nada mais é do que uma transformação linear da normal unitária ( $\mathbf{n}$ ) do plano em que o vetor de tensões foi determinado.

As nove componentes de  $\boldsymbol{\sigma}$  são as componentes do tensor de tensões de segunda ordem, o tensor de tensões de Cauchy, dado no sistema cartesiano, por:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_x \\ \mathbf{f}_y \\ \mathbf{f}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (17)$$

Sendo  $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$  as tensões normais e  $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{zy}$  as tensões cisalhantes.

Reescrevendo a Equação 16 matricialmente, tem-se:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f}_x^n \\ \mathbf{f}_y^n \\ \mathbf{f}_z^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \quad (18)$$

O teorema de Cauchy mostra que o estado de tensão em um ponto do corpo é determinado pelo tensor  $\boldsymbol{\sigma}$ . A Figura 4 ilustra o estado de tensão, em coordenadas cartesianas, em um infinitesimal.

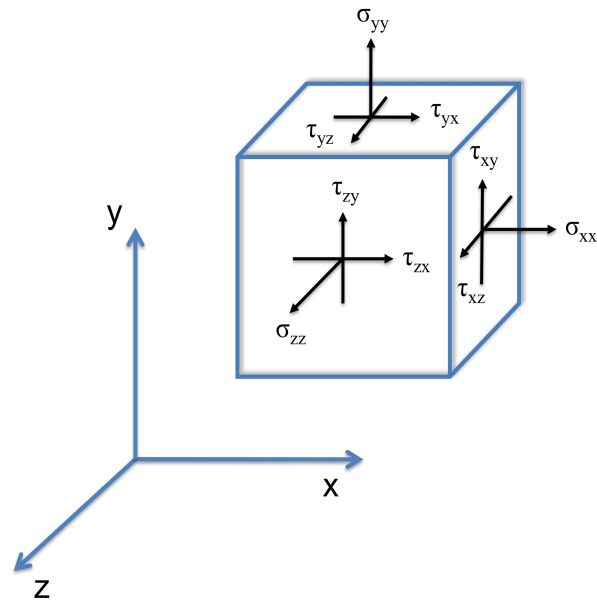


Figura 4: Componentes de tensões em um ponto do material

As tensões de cisalhamento que agem em um ponto em direções perpendiculares, em quaisquer pares de planos perpendiculares entre si, são sempre iguais. Conforme ilustrado na Figura 5.

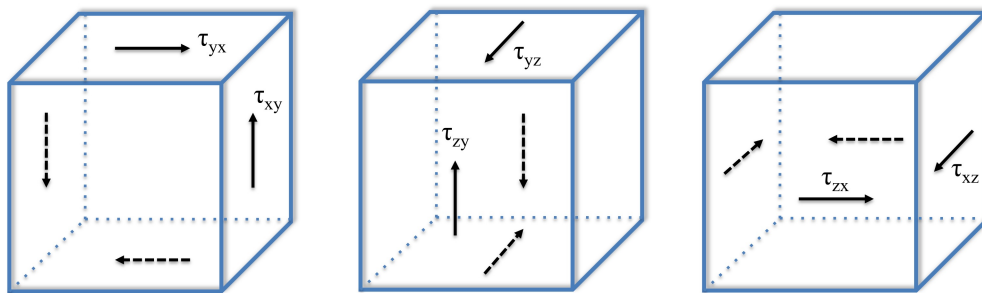


Figura 5: Igualdade das tensões de cisalhamento

Portanto, a igualdade das três componentes conjugadas, mostram que o tensor de tensões em um



ponto contém somente seis componentes independentes:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} = \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} = \tau_{xz} & \tau_{zy} = \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

### 3.2.3 Mudança de observador

Uma das principais doutrinas da mecânica, é a condição de que a resposta de um corpo material é independente do observador, [21]. Se os tensores  $\sigma$  e  $\sigma'$  se relacionam através de uma mudança de observador, então o campo de forças de superfície correspondente deve ser transformado, conforme ilustrado na Figura 6.

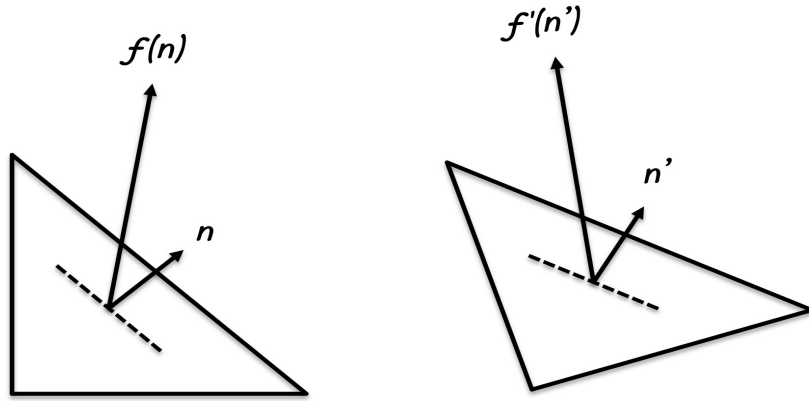


Figura 6: Mudança de observador, Adaptado de [21]

Conforme apresentado por Gurtin (1970) se,

$$\mathbf{n}' = \mathbf{R} \mathbf{n} \quad (19)$$

Espera-se, que:

$$\mathbf{f}'(\mathbf{n}') = \mathbf{R} \mathbf{f}(\mathbf{n}) \quad (20)$$

Mas,

$$\mathbf{f}(\mathbf{n}) = \sigma \mathbf{n}$$

Então,

$$\mathbf{f}'(\mathbf{n}') = \boldsymbol{\sigma}' \mathbf{n}' \quad (21)$$

Portanto,

$$\boldsymbol{\sigma}' \cdot \mathbf{n}' = \mathbf{R} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{R}^T \mathbf{n}' \quad (22)$$

Uma vez que essa relação deve ser mantida para qualquer vetor unitário  $\mathbf{n}'$ , a lei de transformação para o tensor de tensões é dada por:

$$\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{R} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{R}^T \quad (23)$$

Sendo  $\mathbf{R}$  uma matriz de rotação.

### 3.2.4 Coordenadas cilíndricas

Em alguns casos, é preferível utilizar um sistema de coordenadas polares (cilíndricas) em vez de um sistema cartesiano ortogonal. Um exemplo de utilização desse sistema é a análise de distribuição das tensões ao redor de cavidades circulares, [3]. Um tensor de tensão em um sistema ortogonal local (x,y,z) pode ser expresso em termos (r,θ, z) conforme lei de transformação:

$$\boldsymbol{\sigma}(r, \varphi, z) = \mathbf{R} \boldsymbol{\sigma}(x, y, z) \mathbf{R}^T \quad (24)$$

Onde  $\mathbf{R}$  é a matriz de rotação.

A distribuição das tensões no sistema de coordenadas cilíndricas (r,φ, z) pode ser visualizado na Figura 7.

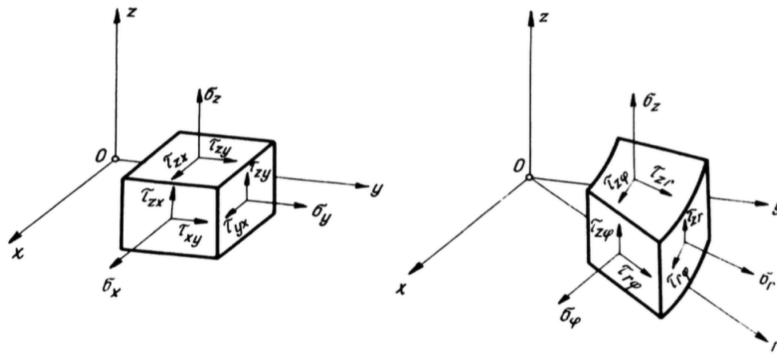


Figura 7: Representação gráfica de tensões em sistema polar, Obtido de [3]

### 3.3 Balanço do Momento - Equações de Equilíbrio

Conforme descrito em Charlez (1991), o momento linear de um corpo pode ser definido como a medida da tendência de um objeto em se manter em movimento uma vez que ele é colocado em movimento. O momento linear ( $M$ ) de um corpo de massa  $m$  com velocidade  $\vec{v}$  é a quantidade  $m\vec{v}$ . A taxa de variação do momento linear devido à influência de forças aplicadas, é tal que:

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\mathbf{a} \quad (25)$$

assumindo que  $\frac{dm}{dt} = 0$ , e sendo  $\mathbf{a}$  a aceleração.

Desse modo, a segunda lei de Newton ( $F = m\mathbf{a}$ ) pode ser reescrita por:

$$F = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) \quad (26)$$

A relação acima demonstra que a taxa de variação do momento é igual a força aplicada. Esse princípio é conhecido como “balanço do momento linear”. O momento se mantém constante se nenhuma força for aplicada ao sistema, afirmando a “lei de conservação do momento linear”.

Estendendo esse conceito a um elemento diferencial de massa  $dm$ , densidade  $\rho$ , volume  $V$  e superfície externa  $S$ , sujeita a força resultante  $\mathbf{f}_n$  e forças de corpo resultante  $\mathbf{b}$ , tem-se:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{v} dV = \int_S \mathbf{f}_n dS + \int_V \mathbf{b} dV \quad (27)$$

Aplicando-se a conservação da massa, ou seja:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = 0$$

e substituindo a relação do postulado de Cauchy, tem-se:

$$\int_S \mathbf{f}_n dS = \int_S \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} dS$$

Aplicando o teorema da divergência para integral de superfície,

$$\int_S \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} dS = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} dV \quad (28)$$

tem-se, então:

$$\int_V \rho \frac{d\vec{v}}{dt} dV = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} dV + \int_V \mathbf{b} dV \quad (29)$$

Portanto, para qualquer volume V:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \rho \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (30)$$

Se o corpo está em equilíbrio estático e na ausência de forças internas, a Equação 30 é reduzida a:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0 \text{ ou } \text{div}(\boldsymbol{\sigma}) = 0 \quad (31)$$

de forma expandida,

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (32)$$

As equações acima são conhecidas como “equações de equilíbrio” e devem ser satisfeitas em qualquer ponto de um sólido.

### 3.4 Princípio do trabalho virtual (PTV)

O princípio dos trabalhos virtuais estabelece que se um corpo está em equilíbrio, os trabalhos totais dos esforços internos e externos desse corpo para qualquer deslocamento virtual  $\mathbf{v}(x, y, z)$  devem ser nulos, ou seja:

$$W_e + W_i = 0 \quad (33)$$

Onde:

$W_e$  = Trabalho das forças externas.

$W_i$  = Trabalho das forças internas.

O princípio dos trabalhos virtuais possui grande utilidade na mecânica dos sólidos deformáveis. Uma de suas aplicações está na formulação do método dos elementos finitos, onde o PTV serve de base para a formulação fraca e permite modelar um problema contínuo em um problema discreto, [28].

Conforme demonstrado em [28], sabendo que o equilíbrio no interior do sólido e o equilíbrio na fronteira são dados por:

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \mathbf{b} = 0 \\ \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{f}_n = \boldsymbol{\sigma}_n \end{cases} \quad (34)$$

Com,

$\boldsymbol{\sigma}$  = Tensor de tensões;

$\mathbf{b}$  = O vetor das forças de corpo;

$\mathbf{n}$  = O vetor normal à superfície;

$\boldsymbol{\sigma}_n$  = A carga externa distribuída na superfície do sólido .

Multiplicando a equação de equilíbrio interno por um campo de deslocamentos qualquer “ $\mathbf{v}$ ” e integrando em todo o volume, têm-se:

$$\int_V (\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{v} dV = 0 \quad (35)$$

Aplicando-se o teorema da divergência, obtêm-se:

$$\int_S (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} dS - \int_V \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{v} dV + \int_V \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dV = 0 \quad (36)$$

Onde, pelo equilíbrio na fronteira:

$$\int_S (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} dS = \int_S \boldsymbol{\sigma}_n \cdot \mathbf{v} dS \quad (37)$$

Tem-se portanto:

$$\int_S \boldsymbol{\sigma}_n \cdot \mathbf{v} dS - \int_V \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{v} dV + \int_V \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dV = 0 \quad (38)$$

Então,

$$\begin{aligned} W_e &= \int_V \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dV + \int_S \boldsymbol{\sigma}_n \cdot \mathbf{v} dS \\ W_i &= \int_V \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{v} dV \end{aligned} \quad (39)$$

O trabalho interno pode ser descrito em termos dos tensores de deformação. Sabendo que o produto interno entre os tensores  $\boldsymbol{\sigma}$  e  $\nabla \mathbf{v}$  é:

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{v} = \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}^T \nabla \mathbf{v}) \quad (40)$$

Uma vez que o tensor de tensões é simétrico, conforme demonstrado anteriormente, então:

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \boldsymbol{\sigma}$$

Escrevendo também o tensor  $\nabla \mathbf{v}$  em suas partes simétrica e anti-simétrica:

$$\nabla \mathbf{v} = \frac{1}{2} [(\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) + (\nabla \mathbf{v} - \nabla \mathbf{v}^T)]$$

Sendo:

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{v}^S &= \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) \\ \nabla \mathbf{v}^A &= \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v} - \nabla \mathbf{v}^T) \end{aligned}$$

Reescrevendo então:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{v} &= \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}^T \cdot \nabla \mathbf{v}) = \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}(\nabla \mathbf{v}^S + \nabla \mathbf{v}^A)) \\ &= \text{tr}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{v}^S) + \text{tr}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{v}^A) \end{aligned}$$

Onde:

$$\text{tr}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{v}^A) = 0$$

Portanto,

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{v} = \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}^T \cdot \nabla \mathbf{v}) = \text{tr}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{v}^S) = \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{v}^S$$

Sabendo que a parte simétrica do gradiente do campo de deslocamentos corresponde ao tensor

de deformações infinitesimais  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , então:

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{v}^S = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$$

Desse modo, reescrevendo o trabalho interno, tem-se:

$$W_i = \int_V \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{v} \, dV = \int_V \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \, dV \quad (41)$$

## 4 Elasticidade Linear

### 4.1 Lei de Hooke

No século 17, Robert Hooke, estudando o comportamento de molas, observou que a deformação (aumento do comprimento) sofrida pela mola, era proporcional ao peso do corpo suspenso à extremidade dessa mola. Ou seja, quanto maior o peso do corpo, maior era a deformação da mola, [43]. Essa constatação se repetiu em outros sistemas elásticos analisados por Hooke.

Hooke então descreveu o resultado de suas observações em uma lei geral, onde: a intensidade da força elástica ( $\mathbf{F}_{el}$ ) é diretamente proporcional à deformação ( $\Delta l$ ). A lei pode ser escrita matematicamente por:

$$\mathbf{F}_{el} = -k \Delta l \quad (42)$$

Sendo  $k$  a constante elástica da mola, a qual representa a rigidez da mesma. O sinal negativo demonstra vetorialmente que a força elástica possui sentido contrário ao vetor deformação.

### 4.2 Elasticidade em materiais

Um material elástico é caracterizado por uma relação entre o estado de tensões e o estado de deformação em um ponto. Esse tipo de material possui as seguintes propriedades, conforme apresentado por Parnes (2001):

- O estado final de tensões em um ponto depende somente do estado final de deformação.
- A curva  $\sigma - \varepsilon$  definida pela equação constitutiva, deve ser única, isto é, a relação entre a tensão e deformação, deve ser uma relação um-para-um.

Se um material sofrer um carregamento sucessivo e com crescimento gradual (iniciando de um estado de tensão não deformado e não tensionado), será notado que existe uma tensão máxima para a qual o material se comporta elasticamente. Essa tensão é chamada de tensão “limite elástico” e caracterizada por  $\sigma_E$ . Desse modo, refere-se por “elástico” o material que retorna a sua forma inicial após cessar o carregamento.



Considerando um estado de tensão uniaxial,  $\sigma_x$ , onde todas as outras componentes são zero, a relação linear para esse caso é dada por:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x \quad (43)$$

onde  $E$  ( $E > 0$ ) é o “módulo de elasticidade” ou “módulo de Young” do material. A relação apresentada na Equação 43 representa a Lei de Hooke para um caso uni-dimensional.

A curva geral de um material elástico está representada na Figura 8 . Observa-se que a inclinação da reta é o módulo elástico do material ( $E$ ).

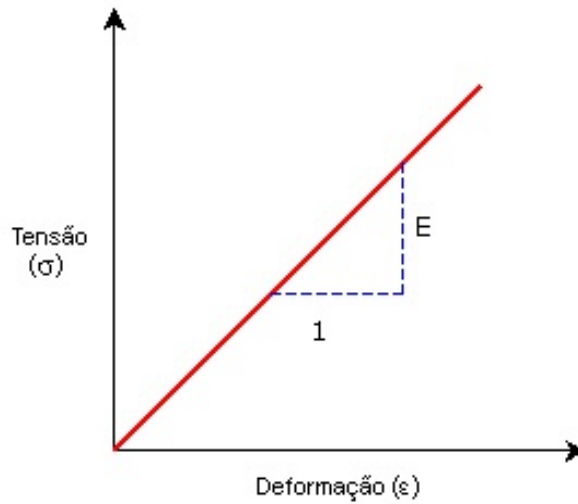


Figura 8: Curva geral de um material elástico, Obtido de [41]

Nota-se que se o estado de deformação em um ponto é dado, o estado de tensão nesse ponto é facilmente identificado.

#### 4.3 Relação tensão-deformação para um material linear elástico em três dimensões

A relação tensão-deformação para condição linear elástica pode ser representada por, [10]:

$$\sigma = C\varepsilon + \sigma_0 \quad (44)$$

ou, em termos das tensões:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\varepsilon}_0 \quad (45)$$

Onde:

$\boldsymbol{\sigma}$  = Tensor de tensões;

$\mathbf{C}$  = Matriz constitutiva de constantes elásticas com 81 coeficientes;

$\boldsymbol{\varepsilon}$  = Tensor de deformações;

$\boldsymbol{\sigma}_0$  = Tensor de tensões iniciais, quando houver;

$\boldsymbol{\varepsilon}_0$  = Tensor de deformações iniciais, quando houver.

As relações apresentadas nas Equações 44 e 45 são válidas para casos unidimensionais, bidimensionais e tridimensionais. Para o caso onde não existem tensões ou deformações iniciais, os tensores  $\boldsymbol{\sigma}_0$  e  $\boldsymbol{\varepsilon}_0$  são nulos.

Para um material isotrópico, a matriz constitutiva  $\mathbf{C}$  é substancialmente reduzida e pode ser escrita em termos dos dois parâmetros de Lamé ( $\lambda$  e  $\mu$ ), estabelecidos por Gabriel Lamé em meados do século XIX, [20].

O tensor de tensões pode ser representado pela notação de Voight, conforme Equação 46:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_{xx0} \\ \sigma_{yy0} \\ \sigma_{zz0} \\ \tau_{xy0} \\ \tau_{yz0} \\ \tau_{zx0} \end{pmatrix} \quad (46)$$

Onde:

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$$

Sendo E o módulo de elasticidade e  $\nu$  o coeficiente de Poisson. (Ver apêndice)

A Equação 46 também pode ser escrita em termos de constantes de engenharia  $E$  e  $\nu$ , [20], como:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{pmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\nu \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_{xx0} \\ \sigma_{yy0} \\ \sigma_{zz0} \\ \tau_{xy0} \\ \tau_{yz0} \\ \tau_{zx0} \end{pmatrix} \quad (47)$$

A relação tensão-deformação elástica também pode ser escrita pela Lei de Hooke Generalizada, representada de forma compacta por:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} + \lambda \boldsymbol{e} \mathbf{I} \quad (48)$$

Sendo,

$$\boldsymbol{e} = \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})$$

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A Equação 48 também pode ser escrita em termos das tensões:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2\mu} \boldsymbol{\sigma} - \frac{\lambda}{2\mu(2\mu + 3\lambda)} \mathbf{I} \boldsymbol{\sigma} \quad (49)$$

#### 4.3.1 Estado plano de tensão

O estado plano de tensão é um modelo simplificado utilizado quando prevalecem apenas duas direções e o carregamento é aplicado no plano principal do sólido. Como exemplo de utilização, pode-se citar carregamentos em chapas, elas possuem espessuras muito finas quando comparadas ao comprimento e largura, [5].

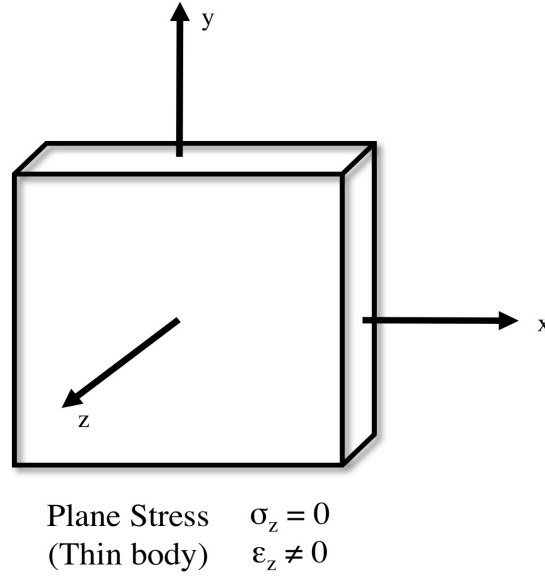


Figura 9: Estado plano de tensão em placas finas, Adaptado de [5]

Admite-se as seguintes premissas para esse caso:

- não há carregamento na face normal ao eixo  $z$ ;
- as forças de corpo agem somente no plano  $x$ - $y$  e independem de  $z$ , ou seja,  $b_z = 0$ .
- a espessura do sólido é pequena em relação às dimensões em  $x$  e  $y$ .
- as forças externas totais que agem sobre o sólido são planas e independentes de  $z$ , portanto,  $\sigma_{nz} = 0$ .

Tais condições permitem assumir que não ocorre variação das tensões na direção  $z$ , podendo-se desconsiderar as tensões  $\sigma_{zz}$ ,  $\tau_{zy}$ ,  $\tau_{zx}$  em presença das outras tensões. Desse modo:

$$\sigma_{zz} = \sigma_{zy} = \sigma_{zx} = 0$$

Deve-se atentar que o deslocamento na direção  $z$ ,  $u_z \neq 0$ , e a deformação  $\epsilon_{zz}$  pode ser calculada em função dos deslocamentos no plano  $x$ - $y$ .

Para o estado plano de tensão, tem-se a seguinte equação de equilíbrio:

$$\text{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \mathbf{b} = 0 \implies \begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}(x,y)}{\partial y} + b_x(x,y) = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}(x,y)}{\partial y} + b_y(x,y) = 0 \end{cases} \quad (50)$$

Para esse caso, assume-se a relação:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ 0 \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \end{pmatrix} \quad (51)$$

Onde  $\varepsilon_{zz}$  pode ser calculado, por:

$$0 = \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{zz} \quad (52)$$

Em termos de  $E$  e  $\nu$ , tem-se:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ 0 \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{bmatrix} 1 - \nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1 - \nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1 - \nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - 2\nu \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \end{pmatrix} \quad (53)$$

#### 4.3.2 Estado plano de deformação

O modelo estado plano de deformação, representa o comportamento de corpos que apresentam grande comprimento. Os deslocamentos normais à esses corpos podem ser assumidos como nulos, [5].

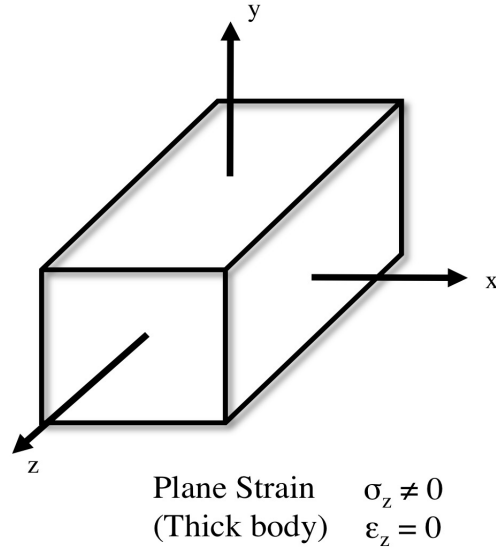


Figura 10: Estado plano de deformação em corpos espessos, Adaptado de [5]

Esse caso admite as seguintes hipóteses:

- Uma vez que a espessura do corpo é muito grande quando comparada às dimensões nas direções x e y, os deslocamentos axiais nesse corpo são considerados nulos;
- Nesse caso,  $\sigma_{zz} \neq 0$ .
- As forças de corpo e de superfície normais às direções x e y independem de z.
- As deformações  $\epsilon_{zz} = \epsilon_{yz} = \epsilon_{xz} = 0$ .

A equação de equilíbrio para o estado plano de deformação se torna:

$$\text{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \mathbf{b} = 0 \implies \begin{cases} \frac{\partial \sigma_x(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}(x,y)}{\partial y} + b_x(x,y) = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y(x,y)}{\partial y} + b_y(x,y) = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{zz}(x,y)}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (54)$$

E chega-se à seguinte relação para o modelo estado plano de deformação:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 0 \\ \varepsilon_{xy} \end{pmatrix} \quad (55)$$

Ou,

$$\sigma_{xx} = (\lambda + 2\mu) \varepsilon_{xx} + \lambda \varepsilon_{yy} \quad (56)$$

$$\sigma_{yy} = \lambda \varepsilon_{xx} + (\lambda + 2\mu) \varepsilon_{yy} \quad (57)$$

$$\tau_{xy} = 2\mu \varepsilon_{xy} \quad (58)$$

Onde  $\sigma_{zz}$  pode ser calculado por:

$$\sigma_{zz} = \lambda (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \quad (59)$$

As Equações 56, 57, 58 podem ser escritas em termos dos deslocamentos, como:

$$\sigma_{xx} = (\lambda + 2\mu) \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) + \lambda \left( \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) \quad (60)$$

$$\sigma_{yy} = \lambda \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) + (\lambda + 2\mu) \left( \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) \quad (61)$$

$$\tau_{xy} = \mu \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \quad (62)$$

E  $\sigma_{zz}$  :

$$\sigma_{zz} = \lambda \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) \quad (63)$$

Da mesma maneira, em termos de constantes de engenharia, tem-se:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2\nu \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 0 \\ \varepsilon_{xy} \end{pmatrix} \quad (64)$$

E em termos dos deslocamentos, conforme será utilizado na implementação da formulação deste trabalho, chega-se a:

$$\sigma_{xx} = \frac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) + \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \left( \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) \quad (65)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)} \left( \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) + \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) \quad (66)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \quad (67)$$

E  $\sigma_{zz}$  :

$$\sigma_{zz} = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) \quad (68)$$

Escrevendo ainda para as deformações, em termos das tensões:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 0 \\ \varepsilon_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1+\nu}{E} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} \quad (69)$$

Tem-se:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] \quad (70)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})] \quad (71)$$



$$\varepsilon_{xy} = \frac{(1 + \nu)}{E} \tau_{xy} \quad (72)$$

E  $\sigma_{zz}$  pode ser calculado ainda por:

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad (73)$$

## 5 Plasticidade

Quando um contínuo sofre deformação a partir de carregamentos ou mudanças ambientais que não obedecem as leis da elasticidade clássica, diz-se que o esse corpo sofreu deformação inelástica, [25]. Deformações irreversíveis, resultando em mudanças dimensionais permanentes, são conhecidas como deformações plásticas. Essas deformações ocorrem quando o corpo é submetido a tensões acima de um valor limite, conhecido como limite elástico ou tensão limite de escoamento.

O conceito de plasticidade pode ser apresentado conforme diagrama tensão-deformação da Figura 11, conforme apresentado por Mase (1970), para um teste unidimensional.

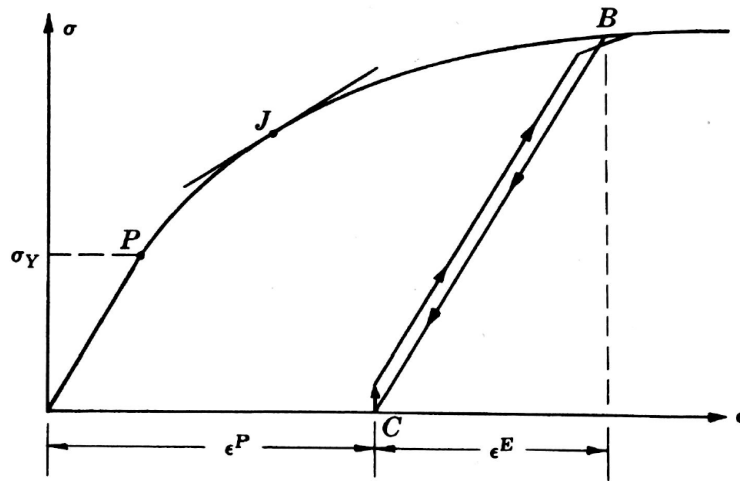


Figura 11: Diagrama tensão-deformação, Obtido de [25]

No diagrama, o ponto **P** corresponde à tensão limite de escoamento ( $\sigma_y$ ), a qual separa a curva da série elástica e plástica. Uma vez que o ponto de escoamento não é bem definido, toma-se este ponto como limite proporcional situado acima da porção linear da curva. Uma das maneiras de se definir o ponto de escoamento, é por meio do ponto **J**, conhecido como limite elástico aparente de Johnson, (conforme destaca o diagrama) onde a inclinação da curva atinge 50% de seu valor.

Na série plástica o descarregamento no ponto **B**, por exemplo, resulta em um ponto de estado **BC** o qual segue paralelamente a porção linear da curva. A deformação plástica irreversível  $\varepsilon^P$  permanece quando **C** atinge tensão zero. A deformação elástica recuperável de **B** é definida por  $\varepsilon^E$ . Um novo carregamento a partir de **C**, de volta a **B**, poderia obedecer a trajetória de **BC**

com uma volta em  $\mathbf{B}$  e um pequeno ciclo de histerese resultando em perda de energia no ciclo descarregamento-carregamento.

No retorno a  $\mathbf{B}$ , é necessário um aumento no carregamento para gerar deformação plástica adicional. Essa condição corresponde ao endurecimento do material. Desse modo, na série plástica a tensão depende de todo o carregamento ou histórico de deformação do material.

Modelos com ausência de endurecimento são chamados de modelos perfeitamente plásticos e possuem a superfície de escoamento fixa, [8].

### 5.1 O critério de escoamento e a função de plastificação

Conforme apresentado por Souza Neto *et al* (2008), introduz-se a função de escoamento  $\Phi$ , na forma,

$$\Phi(\sigma, \sigma_y) = |\sigma| - \sigma_y \quad (74)$$

O domínio elástico em um estado uniaxial de tensão, é o conjunto de tensões  $\sigma$  que satisfaz,

$$|\sigma| < \sigma_y \quad (75)$$

Nenhum nível de tensão é permitido acima da tensão de escoamento. Portanto, as tensões plásticas admissíveis situam-se dentro do domínio elástico ou em seu contorno (limite elástico), satisfazendo portanto:

$$\Phi(\sigma, \sigma_y) \leq 0 \quad (76)$$

No contorno do domínio elástico, pode ocorrer tanto descarregamento elástico quanto carregamento plástico. Dentro do domínio elástico contudo, pode ocorrer somente tensão elástica. Define-se esse critério de escoamento por:

$$\begin{aligned} &\text{Se } \Phi(\sigma, \sigma_y) < 0 \rightarrow \dot{\epsilon}^p = 0, \\ &\text{Se } \Phi(\sigma, \sigma_y) = 0 \rightarrow \begin{cases} \dot{\epsilon}^p = 0 & \text{para descarregamento elástico} \\ \dot{\epsilon}^p \neq 0 & \text{para carregamento plástico} \end{cases} \end{aligned} \quad (77)$$

Existem muitos critérios que avaliam a plastificação de um material, entre eles pode-se citar:

critério de Tresca, von Mises, Mohr-Coulomb, Drucker-Prager, Sandler-Dimaggio, entre outros. Selecionou-se neste trabalho o critério de Sandler-Dimaggio por ele representar bem o comportamento das rochas, [8].

## 5.2 Critério de escoamento de Sandler-Dimaggio

De acordo com Cecílio (2014) e Santos (2009), o modelo elastoplástico de Sandler-Dimaggio possui boa representação do comportamento constitutivo das rochas. A função de plastificação  $\Phi$  do modelo é constituída por duas funções ( $F_1$  e  $F_2$ ). A primeira função se refere à uma envoltória de cisalhamento e a segunda à uma elipse de fechamento, denominada de *cap*, a qual limita a deformação elástica sob confinamento. As características do modelo com *cap* permitem sua utilização na pesquisa de estabilidade de poços e compactação de reservatórios.

Define-se a função de plastificação, conforme apresentado em [8], por:

$$\Phi = \begin{cases} F_1(I_1, \sqrt{J_2}, \beta) & I_1 > L \\ F_2(I_1, \sqrt{J_2}, \beta, L) & L \geq I_1 \geq X \end{cases} \quad (78)$$

Em que,

$$F_1(I_1, \sqrt{J_2}, \beta) = \sqrt{J_2} - \frac{F_f(s)}{\Gamma(\beta)} \quad (79)$$

$$F_2(I_1, \sqrt{J_2}, \beta, L) = \left( \frac{I_1 - L}{RF_f(L)} \right)^2 + \left( \frac{\sqrt{J_2}\Gamma(\beta)}{F_f(L)} \right)^2 - 1 \quad (80)$$

$$F_f(s) = A - C \exp(B s) \quad (81)$$

$$\Gamma(\beta) = \frac{1}{2} \left[ (1 + \sin(3\beta)) + \frac{1}{\psi} (1 - \sin(3\beta)) \right] \quad (82)$$

Onde:

- A transição entre as funções é dada pela variável  $L$ ;
- $I_1$  é o primeiro invariante do tensor de tensões;
- $J_2$  é o segundo invariante do tensor deviatórico de tensões;
- No modelo clássico de Sandler-Dimaggio,  $\psi = 1$ , de forma que  $\Gamma(\beta) = 1$ ;
- A, B, C, R são constantes materiais, obtidas por meio de testes em laboratório.

A Figura 12 apresenta as superfícies de plastificação de um modelo clássico de Sandler-Dimaggio.

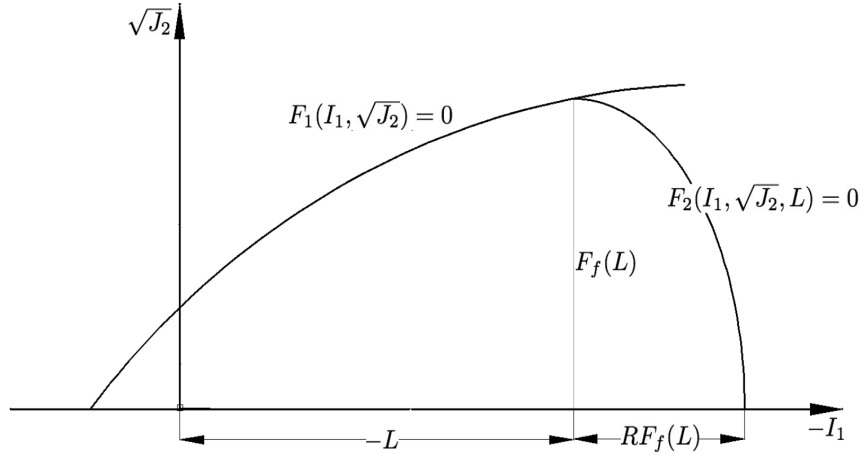


Figura 12: Modelo elastoplástico de Sandler-Dimaggio, Obtido de [8]

## 6 Estabilidade de Poços na Perfuração

Instabilidade de poço é um dos principais desafios nas operações de perfuração. Problemas de estabilidade podem significar 5%-10% dos custos em exploração e produção, incluindo tempo extra de operação e em alguns casos, perda de equipamentos, [17].

A instabilidade dos poços contudo, está presente na indústria de óleo e gás desde o início da perfuração de poços. Novos desafios nessa questão têm aparecido a cada ano, tornando o estudo da estabilidade de poços cada vez mais complexo. Entre os novos desafios pode-se citar o crescimento de poços com trajetórias mais sofisticadas, isto é, uma demanda por poços altamente desviados, multilaterais e horizontais. A estabilidade de poços desviados é geralmente mais complexa quando comparada à poços verticais, [17].

A perfuração de poços em águas profundas é também um desafio singular, mas se tornou uma prática comum em muitos países. O Brasil por exemplo, possui atualmente 94,4% de sua produção de óleo mensal oriunda de campos marítimos (Boletim da Produção de Petróleo e Gás Natural, ANP/Agosto 2016). A dificuldade e o custo operacional que esse cenário oferece e muitas vezes a necessidade de perfuração de poços desviados nesses meios, tornam as operações nesses ambientes muito desafiadoras.

Observa-se portanto, a importância do estudo da estabilidade de poços na indústria de petróleo para desenvolver poços seguros, sem adicional de tempo e capital.

A análise de estabilidade de poços pode ser representada por um problema mecânico clássico, no qual estuda-se a resposta da rocha à carregamentos mecânicos. Porém, algumas características dificultam a análise de estabilidade de poço, tais como: mudança de temperatura no sistema, química da lama de perfuração, redistribuição das tensões, condições operacionais reais diferentes da idealizada no estudo, variação das tensões *in-situ*, falta de observação da operação e testemunhos, etc. Admitindo-se essas interferências e incertezas, pode-se dizer que os modelos desenvolvidos para análise de estabilidade de poços fornecem - com hipóteses ideais - guias e orientações para o cenário mais próximo possível às condições reais e práticas, [17].

## 6.1 O fluido de perfuração e a rocha

Apresenta-se primeiramente uma breve descrição de parte do processo de perfuração, mostrando de maneira resumida a importância da lama/fluido de perfuração na estabilidade da formação.

Na perfuração, a formação ao redor do poço deve suportar o carregamento antes suportado pela rocha removida na operação. Rochas que apresentam comportamento linear-elástico tendem a concentrar as tensões próximo à parede do poço, [19]. Essa concentração pode levar à falhas da formação.

Ao longo da perfuração, o poço é preenchido com o fluido de perfuração, o qual possui as seguintes funções, [37]:

- exercer pressão hidrostática sobre as formações, a fim de estabilizar as paredes do poço e evitar o influxo de fluidos indesejáveis (*kick*);
- limpar o fundo do poço dos cascalhos gerados na operação e transportá-los à superfície;
- resfriar e lubrificar a broca e a coluna de perfuração.

Uma vez que as paredes do poço são temporariamente suportadas pelo fluido de perfuração, o fluido exerce maior ou menor pressão na formação de acordo com a sua densidade. A pressão do fluido de perfuração é calculada conforme equação:

$$P_w = \rho_w g D \quad (83)$$

Onde:

$P_w$  = pressão da lama/fluido de perfuração;

$\rho_w$  = densidade da lama/fluido de perfuração;

$g$  = constante gravitacional;

$D$  = profundidade vertical.

A Figura 13 ilustra o movimento da lama de perfuração por dentro da coluna e seu retorno pelo anular, observa-se também a direção dos carregamentos: pressão do fluido na formação e a pressão da formação na parede do poço.

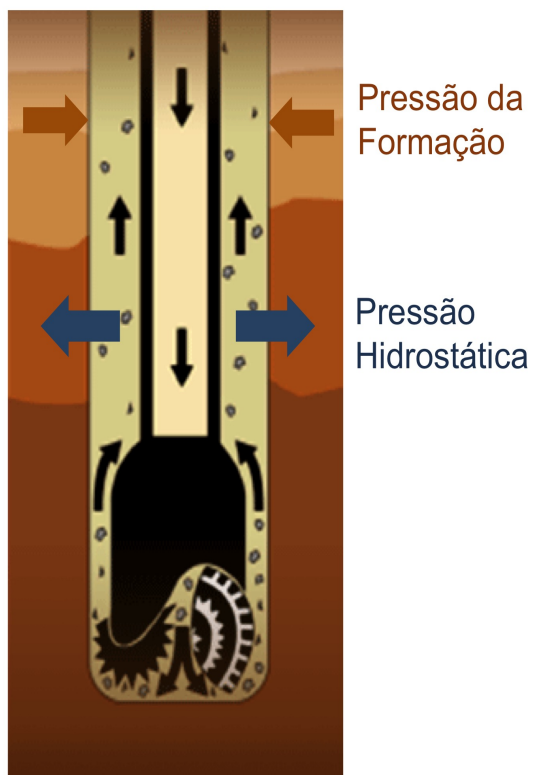


Figura 13: Direção do fluido de perfuração e carregamentos dentro de um poço - Adaptado de [40]

A densidade do fluido de perfuração deve ser suficientemente alta para que a pressão dentro do poço esteja sempre acima da pressão de poros da formação e ao mesmo tempo, abaixo da pressão de fratura da formação. Essa margem de densidade permitida é significativamente estreita, e deve-se ainda considerar a densidade de circulação equivalente (ECD), composta pela densidade estática da lama mais um termo equivalente à queda de pressão no anular. A Figura 14 apresenta a pressão de poros e a pressão de fratura do campo de Gullfaks no Mar do Norte. Nota-se na imagem que a margem de trabalho permitida entre o gradiente de poros e de fratura próximo ao fundo do poço é de aproximadamente  $0.4 \text{ g/cm}^3$  ou  $3.33 \text{ lb/gal}$ .



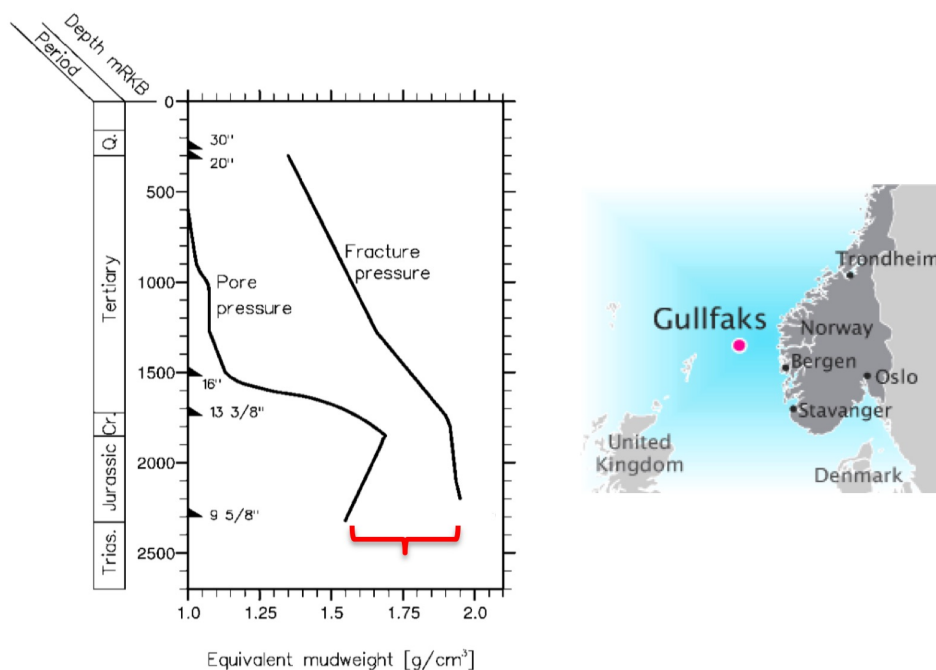


Figura 14: Gradiente de pressões e “peso” de fluido equivalente do Campo Gullfaks no Mar do Norte - Adaptado de [17] e [42]

Existe portanto, um limite superior e um limite inferior para o peso do fluido na operação de perfuração. Na indústria de óleo e gás é muito comum se referir à densidade do fluido como “peso do fluido”, bem como denominar de “gradiente” as tensões e pressões.

### 6.1.1 Fluidos de Perfuração

“Os fluidos de perfuração são misturas complexas de sólidos, líquidos, produtos químicos e, por vezes, até gases. Do ponto de vista químico, eles podem assumir aspecto de suspensão, dispersão coloidal ou emulsão, dependendo do estado físico dos componentes,” [37].

Os fluidos de perfuração são classificados de acordo com sua composição, baseando-se no constituinte principal da fase contínua ou dispersante. Desse modo, os fluidos são classificados em fluidos à base de água, fluidos à base de óleo ou fluidos à base ar ou gás.

Para adquirir uma perfuração rápida e segura, o fluido de perfuração deve apresentar as seguintes características:

- estabilizar as paredes do poço, mecânica e quimicamente;

- ser quimicamente estável;
- ser inerte em relação a danos às rochas produtoras;
- manter os sólidos em suspensão quando não houver circulação;
- apresentar facilidade na separação dos cascalhos na superfície;
- apresentar baixo grau de abrasão e de corrosão comparado à coluna de perfuração e outros equipamentos do sistema de circulação;
- ser bombeável;
- possuir custo compatível com a operação.
- facilitar as interpretações geológicas de amostras e cascalhos retirados do poço;

## 6.2 Tipos de Instabilidade de Poços

Existem basicamente dois tipos de instabilidades em poços de petróleo: a quimicamente induzida e a mecanicamente induzida. Em alguns casos a instabilidade de um poço pode ocorrer pela combinação dos dois tipos, [44].

### 6.2.1 Instabilidade Mecânica

Conforme apresentado por Fjaer *et al* (2008), pode-se classificar a instabilidade mecânica por meio de duas ocorrências operacionais: prisão de coluna e perda de circulação (perda de fluido de perfuração), conforme será apresentado a seguir.

#### 1) Prisão de coluna

As principais causas de prisão de coluna ocorrem devido:

- **Colapso do poço**
  - Alargamento do poço: O aumento do diâmetro do poço pode ser causado pela fratura ou ruptura de formação frágil/quebradiça na parede do poço. Em situações como essa, se os fragmentos de rocha não forem devidamente transportados para a superfície, pode ocasionar a prisão da coluna. O arrombamento do poço também pode ser causado por erosão, tanto hidráulica quanto mecânica, em rochas fracas. O aumento excessivo da cavidade do poço é

referido como *washout*, o qual ocorre geralmente por erosão, podendo ser associado a altas vazões próximo da broca ou à fragilidade da formação por falha mecânica.

- Fechamento do poço: A redução no diâmetro de um poço pode ocorrer devido ao comportamento dúctil de rochas como: folhelhos fracos, arenitos e sais. Esse tipo de instabilidade requer repetidas re-passagens da broca para obter o poço calibrado novamente. Em condições extremas, tal ocorrência pode levar à prisão da coluna e fechamento do poço.

#### **- Limpeza Inapropriada**

A limpeza do poço é essencial durante a perfuração. Ela evita que os cascalhos e os fragmentos (produzidos por falha da formação) fiquem depositados no poço. Se o fluido de perfuração não for capaz de realizar essa limpeza, haverá acumulação e consequente prisão de coluna.

#### **- Desvio de Trajetória**

Desvios de trajetória podem ocorrer quando a cavidade não apresenta forma ideal. Esse tipo de instabilidade ocorre geralmente em poços desviados. Nesses casos, o fenômeno conhecido como *key-seat* pode ocorrer: quando a parte baixa da ferramenta de perfuração escava a lateral do poço. A ferramenta de perfuração também pode ser desviada quando guiada por *washouts* ou *breakouts*.

As instabilidades relacionadas à prisão de coluna podem afetar dramaticamente o desenvolvimento do poço. Um poço não calibrado pode afetar futuras operações como perfilagem do poço e cimentação. Para esta última, se o volume da pasta de cimento não for bem projetado, pode gerar uma pobre cimentação do revestimento complicando a produção, controle de areia, simulação, etc.

## **2) Perda de circulação**

Denomina-se perda de circulação ou perda de fluido, quando um volume significativo de lama de perfuração é perdido para a formação. Essa perda pode ocorrer por uma falha pré-existente ou uma falha criada pela pressão hidrostática do fluido. Para evitar esse tipo de ocorrência, mantêm-se a densidade (peso) da lama suficientemente baixa para não fraturar a formação. Deve-se contudo, considerar a densidade de circulação equivalente (ECD). Em cenários em que as margens entre a pressão de poros e a pressão de fratura são muito pequenas, a ECD pode ser capaz de exceder a pressão de fratura.

Um dos problemas operacionais que a perda de circulação pode trazer é o fato da lama possuir um alto custo e em geral, não há grandes quantidades de fluido na plataforma, ou seja, seu consumo é limitado e nesses casos, pode-se comprometer a segurança do poço.

Uma vez perdido o fluido para dentro da formação, há uma queda de pressão dentro do poço. Se abaixo da pressão de poros, fluidos da formação podem invadir o poço e em caso de invasão de gás, o perigo da operação aumenta consideravelmente. A invasão de gás para dentro do poço é conhecida como *kick*. Perda de equipamento, explosão e consequente perda de vidas podem ocorrer se esse gás atingir a superfície com volume muito maior, devido à queda de pressão.

Em situações em que a perda de circulação é confirmada, usa-se aditivos na lama para combater e fechar fraturas.

A Figura 15 apresenta um esquema de instabilidades conforme o “peso” do fluido de perfuração (*mud weight* - MW).

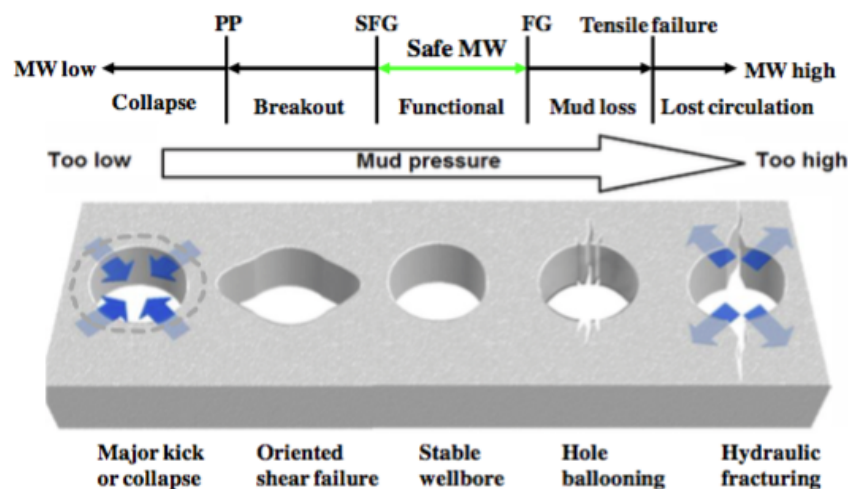


Figura 15: Relação entre falhas e pressão da lama de perfuração - Obtido de [48]

### ***Breakout***

De acordo com Rocha e Azevedo (2007), *breakout* refere-se à zonas de desmoronamento e ruptura por cisalhamento, os quais ocorrem em lados opostos da cavidade do poço. O *breakout* altera a seção transversal do poço, mudando sua geometria circular para elíptica (oval), conforme ilustrado na segunda cavidade da esquerda para a direita da Figura 15. Essa instabilidade ocorre através

de falha por colapso inferior na direção de menor tensão horizontal. A seção de maior eixo se torna portanto paralela à menor tensão horizontal.

### **6.2.2 Instabilidade Química**

As instabilidades químicas mais comuns são, [44] :

- 1) A lixiviação de formações salinas pela fase líquida do fluido de perfuração.
- 2) Absorção de água em formações argilosas.

A solubilização de rochas de sal podem causar descontrolado aumento no diâmetro do poço e prejudicar as propriedades da lama de perfuração, exigindo a descontaminação ou completa reposição da mesma.

A absorção de água por folhelhos pode resultar no inchamento e na queda da resistência da formação, causando arrombamento do poço ou fechamento da cavidade.

A instabilidade química de poços pode ser, em geral, combatida pelo tratamento químico dos fluidos de perfuração. Ciente da formação que será atravessada, é possível planejar as propriedades químicas da lama para combater esses efeitos.

## 7 Tensões atuantes na formação

### 7.1 Tensões *in-situ* e tensões induzidas

Tensões *in-situ* e tensões induzidas caracterizam o estado de tensões em maciços rochosos. Tensão *in-situ* (ou natural) é definida como a tensão atuante nas rochas sem qualquer alteração causada pelo homem, consequente de interações complexas de esforços gravitacionais, tectônicos, processos físico-químicos e efeitos térmicos. Por outro lado, a tensão induzida é resultante da redistribuição das tensões naturais, devido à perturbação dos maciços pelas obras de engenharia, entre elas, um poço de petróleo.

Tensões *in-situ* são geralmente produzidas pela pressão de sobrecarga ou “*overburden*”, decorrente da pressão exercida pelo peso total das camadas sobrejacentes sobre um elemento de rocha. A tensão de sobrecarga a uma dada profundidade, é exercida pelo peso de todas as camadas sobrepostas a um elemento nessa profundidade, [34] conforme Equação 84:

$$\sigma_{ov} = \int_0^z \rho g dz \quad (84)$$

Onde:

$\sigma_{ov}$  = tensão de *overburden* ou sobrecarga;

$\rho$  = densidade das camadas sobrepostas;

$z$  = profundidade desejada, onde  $z = 0$  corresponde à superfície terrestre.

$dz$  = variação de profundidade.

As tensões das formações rochosas se encontram naturalmente em equilíbrio antes da perfuração. Quando a perfuração é realizada, o estado de tensões é perturbado e ocorre a redistribuição das tensões na formação remanescente. Com o objetivo de restaurar o equilíbrio inicial, o estado de tensões original é então substituído pela pressão hidrostática por meio da coluna de fluido de perfuração dentro do poço. Esse procedimento permite garantir a estabilidade da estrutura ao redor do poço, porém, não reestabelece o estado de tensões original.

A instabilidade das formações, conforme o regime de tensões de cada subsolo, pode afetar tanto os poços verticais quanto os direcionais. De modo geral, os poços direcionais tendem a apresentar

gradientes de pressão de colapso mais elevados. Esse conceito indicaria o adensamento do fluido de perfuração para evitar o colapso e desmoronamento da formação. No entanto, em cenários que apresentam estreitas janelas operacionais (entre o gradiente de pressão de poros e o de pressão de fratura), como os de águas ultraprofundas que se encontra em grande expansão atualmente, o aumento de densidade do fluido de perfuração poderia motivar o fraturamento da rocha, e consequentemente, ocorrências indesejáveis como perda de fluido para a formação e *kicks*.

## 7.2 Tensões ao redor de um poço de petróleo

A Figura 16 mostra um elemento de rocha em equilíbrio e submetido a um estado de tensões compressivo, o qual consiste em uma tensão vertical e duas tensões horizontais, as chamadas tensões *in-situ*. A tensão *in-situ* vertical é dada pela tensão de sobrecarga  $\sigma_{ov} = \sigma_V$ . As demais tensões são a resposta ao carregamento vertical, que tende a deformar o elemento lateralmente, porém, essa deformação é limitada pelos elementos vizinhos. Essas tensões são chamadas tensões *in-situ* horizontais,  $\sigma_h$  e  $\sigma_H$ , podendo ser iguais ou diferentes.

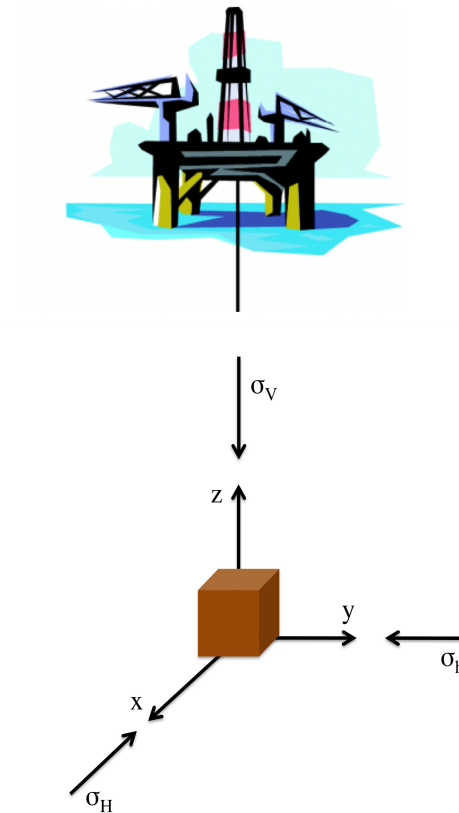


Figura 16: Tensões *in-situ* agindo sobre um elemento de rocha - Adaptado de [39]

Quando as tensões horizontais são desconhecidas, se assumidas iguais, elas podem ser calculadas em termos do coeficiente de Poisson, [17]:

$$\sigma_H = \sigma_h = \frac{\nu}{1 - \nu} \sigma_V \quad (85)$$

A tensão *in-situ* vertical é geralmente a maior tensão quando comparada às tensões horizontais, contudo, existem situações em que esta afirmação não é válida, [34].

### 7.3 Tensões atuantes na parede do poço em coordenadas cilíndricas

As tensões radiais são originadas pelo preenchimento do poço com fluido de perfuração, o qual gera uma pressão contra as paredes do poço. A magnitude da tensão radial na parede do poço é igual à pressão hidrostática gerada pela lama de perfuração. As tensões radiais repõem parte da estrutura que havia na rocha antes da perfuração. As tensões tangenciais agem ao redor da cavidade. A tensão axial atua paralelamente ao eixo dos poços, em suas paredes. A Figura 17 ilustra como as tensões atuam ao redor do poço inclinado, em coordenadas cilíndricas.

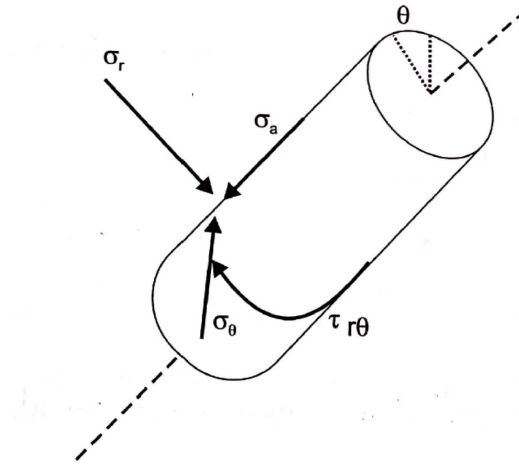


Figura 17: Configuração das tensões ao redor do poço, em coordenadas cilíndricas - Obtido de [34]



### 7.3.1 Estado de tensão triaxial de um poço

O estado de tensão triaxial de um poço é composto pelas tensões axial, tangencial e radial. Suas magnitudes podem diferir de acordo com a posição ao redor do poço e das seguintes variações, [34]. :

- Posição do poço em relação às tensões *in-situ*.
- Comportamento do material rochoso (deformação plástica, elástica ou por fluência).
- Magnitude das tensões verticais e horizontais (*in-situ*).
- Geometria da cavidade do poço.

A Figura 18 ilustra graficamente a variação das tensões radiais ( $\sigma_r$ ), tangenciais ( $\sigma_\theta$ ) e axiais ( $\sigma_a$ ), com o afastamento do poço. Nota-se que as tensões retornam ao seu estado de tensões *in-situ* à medida que se afastam do poço. Outra importante observação é que a maior variação das tensões ocorre na parede do poço.

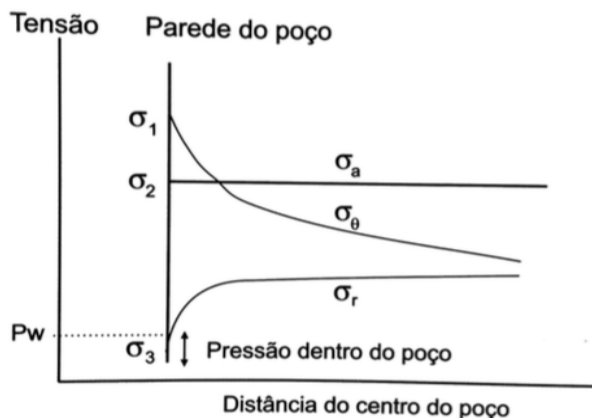


Figura 18: Curvas da magnitude das tensões em função do afastamento do poço - Obtido de [34]

### 7.4 Ensaio uniaxial de uma amostra de rocha

A Figura 19 descreve um típico ensaio uniaxial de rochas. As tensões axiais são plotadas contra as deformações axiais da rocha. Observa-se que conforme a amostra é comprimida, seu diâmetro aumenta e a amostra se torna mais curta. A razão entre a deformação axial e radial é dada pelo coeficiente de Poisson.

A curva apresentada divide-se em, [34]:

1. Região elástica: não ocorre deformações permanentes, ou seja, se o carregamento é suspenso, a amostra retorna ao seu estado original.
2. Região plástica: região onde ocorrem deformações permanentes. Essa região é representada por outras duas regiões:
  - Região dúctil: a rocha é deformada permanentemente sem perder sua habilidade de suportar carga.
  - Região frágil: nesta região, a capacidade da rocha de suportar carregamento decresce rapidamente conforme aumenta a deformação e a ruptura da rocha pode ser atingida.

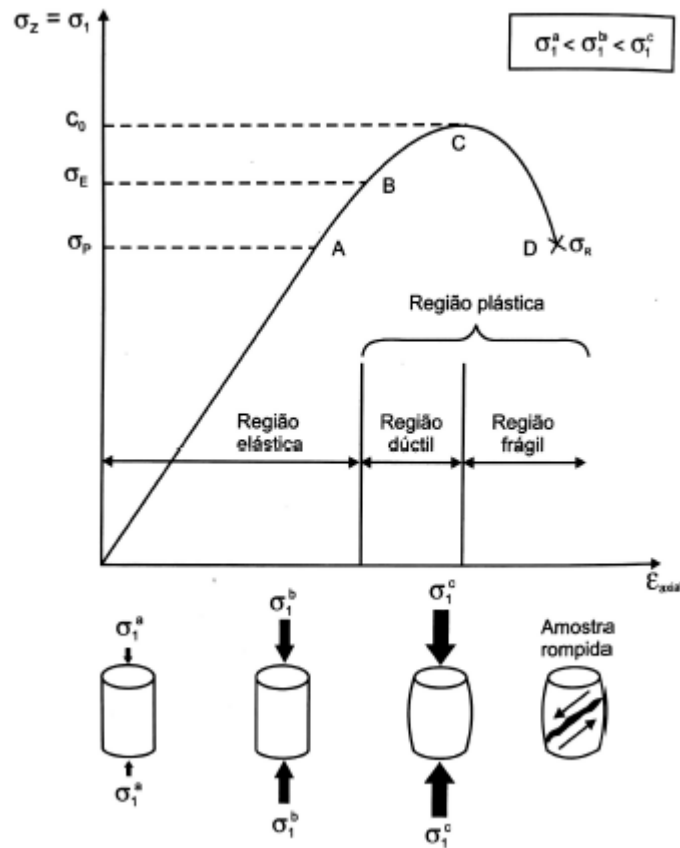


Figura 19: Curva de ensaio uniaxial de rochas - Obtido de [34]

## 8 Soluções analíticas para estado de tensões em poços de petróleo

### 8.1 Direção e inclinação de um poço de petróleo

A perfuração é um processo tri-dimensional, [7]. A broca não penetra verticalmente somente, mas pode também ser propositalmente (ou não) defletida para os planos X-Y. A Figura 20 apresenta um esquema de perfuração direcional, onde nesse caso o plano X é definido pelo plano da direção e o plano Y é definido pelo plano da inclinação. Os ângulos associados com os planos X e Y, são chamados de ângulos de “direção” e “inclinação”, respectivamente.

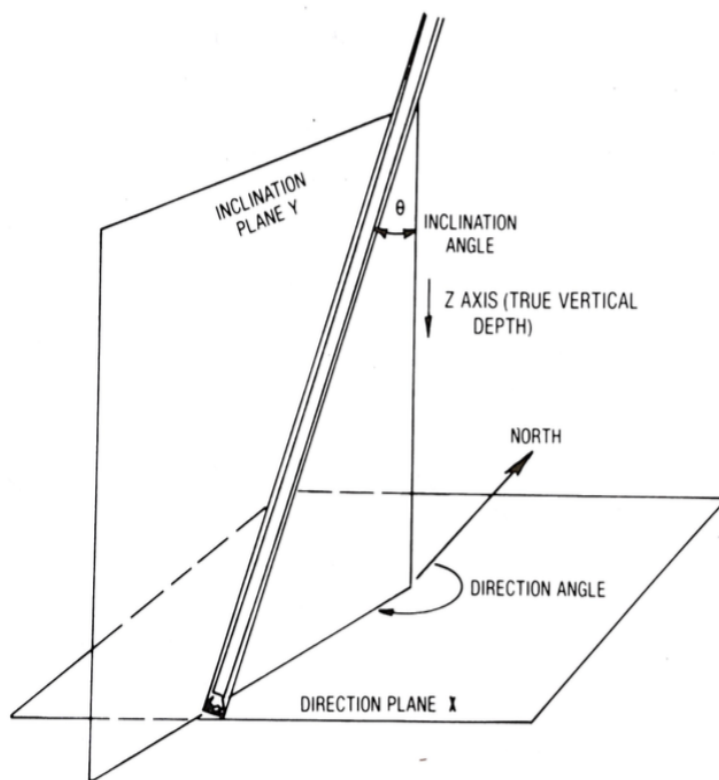


Figura 20: Representação da inclinação e direção do poço - Obtido de [7]

Define-se como inclinação de um poço, o ângulo entre a tangente ao eixo do poço e o vetor local gravitacional. Convencionalmente, em se tratando de um poço vertical, a inclinação tem ângulo igual a  $0^\circ$  e para um poço horizontal, a inclinação tem ângulo igual a  $90^\circ$ , [33].

A direção consiste no ângulo formado entre a projeção horizontal do poço e o norte geográfico verdadeiro, a qual pode ser representada como rumo ou azimuth. Por definição, o rumo varia de

$0^\circ$  a  $90^\circ$  e utiliza como referencial os quadrantes NE, SE, SW e NW, tal que o ZERO se situa no Norte e no Sul e cresce no sentido horário até  $90^\circ$  nos quadrantes NE e SW e no sentido anti-horário nos quadrantes SE e NW. O azimuth, contudo, varia de  $0^\circ$  a  $360^\circ$ , sendo medido sempre no sentido horário a partir do norte geográfico, conforme Figura 21.

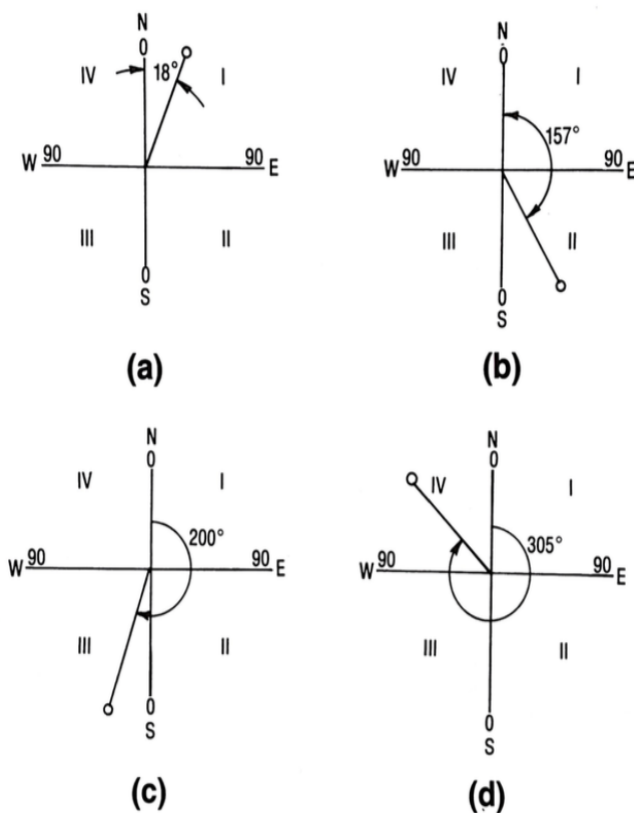


Figura 21: Quadrantes direcionais e medidas de compasso - Obtido de [7]

## 8.2 Solução geral linear elástica

Fjaer *et al*, (2008) publicou em seu livro “*Petroleum related rock mechanics*” uma solução linear elástica para tensões ao redor de poços inclinados. As soluções foram baseadas nas derivações de Jaeger e Cook (1979) e Bradley (1979). As equações de Fjaer *et al*, (2008) são comumente vistas e citadas em estudos de simulação de estabilidade de poços inclinados, incluindo a publicação de Rocha e Azevedo (2007) (*Projetos de Poços de Petróleo*).

As seguintes premissas são adotadas pelo autor:

- O poço é desviado;

- As tensões horizontais são anisotrópicas, ou seja, as tensões horizontais não são as mesmas para todas as direções;
- As tensões principais  $\sigma_V$  (tensão vertical),  $\sigma_H$  (a maior tensão horizontal),  $\sigma_h$  (menor tensão horizontal), são assumidas sem alteração de seu estado original;
- O sistema de coordenadas  $(x,y,z)$  está orientado tal que  $x$  é paralelo a  $\sigma_H$ ,  $y$  é paralelo a  $\sigma_h$  e  $z$  é paralelo a  $\sigma_V$ , conforme a disposição dos eixos escolhidas pelo autor.
- As equações são utilizadas para análise linear elástica da estabilidade de poços.
- As soluções são para tensões em materiais não porosos ou para materiais porosos com pressão de poros constante.
- Os efeitos da pressão de poros podem ser adicionados devido ao princípio da superposição de efeitos.

### 8.2.1 Tensor de Tensões local ao eixo do poço

A transformação dos eixos sob uma mudança de observador, é obtida seguindo a notação do autor: realiza-se uma rotação  $\alpha$  ao redor do eixo  $z$ , e uma rotação  $\beta$  ao redor do eixo  $y$ . O ângulo  $\beta$  representa a inclinação do poço e  $\alpha$  a direção/azimute do poço. Conforme ilustrado na Figura 22.

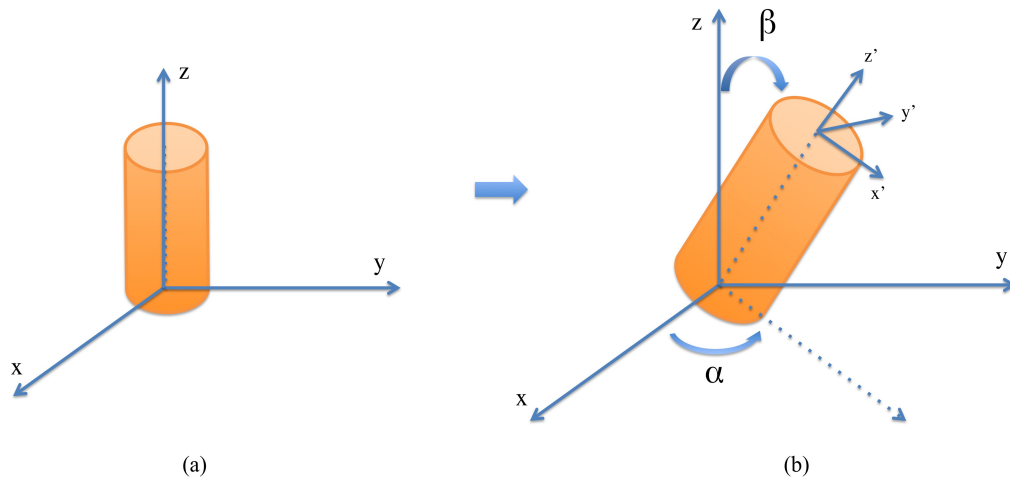


Figura 22: Representação do sistema de coordenadas de um poço com os ângulos de direção e inclinação, (a) Poço vertical e (b) Poço Inclinado

A representação matricial do tensor de tensões iniciais  $\sigma_{InSitu}$  no novo sistema de coordenadas  $x'$ ,  $y'$  e  $z'$  pode ser calculado, de acordo com a posição do poço, por [47]:

$$[\sigma^o] = [Q][\sigma_{InSitu}][Q]^T \quad (86)$$

Onde:

$$Q = \begin{pmatrix} \cos[\alpha]\cos[\beta] & \sin[\alpha]\cos[\beta] & -\sin[\beta] \\ -\sin[\alpha] & \cos[\alpha] & 0 \\ \cos[\alpha]\sin[\beta] & \sin[\alpha]\sin[\beta] & \cos[\beta] \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{InSitu} = \begin{pmatrix} \sigma_H & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_h & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_V \end{pmatrix}$$

$$\sigma^o = \begin{pmatrix} \sigma_x^o & \tau_{xy}^o & \tau_{xz}^o \\ \tau_{yx}^o & \sigma_y^o & \tau_{yz}^o \\ \tau_{zx}^o & \tau_{zy}^o & \sigma_z^o \end{pmatrix}$$

Sendo  $\sigma^o$  o tensor de tensões iniciais do sistema de coordenadas  $x'$ ,  $y'$  e  $z'$ .

A matriz  $Q$  é uma composição das matrizes de rotação em  $z$  e  $y$ :

$$R_z = \begin{pmatrix} \cos[\alpha] & \sin[\alpha] & 0 \\ -\sin[\alpha] & \cos[\alpha] & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_y = \begin{pmatrix} \cos[\beta] & 0 & -\sin[\beta] \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin[\beta] & 0 & \cos[\beta] \end{pmatrix}$$

$$Q = R_y R_z \quad (87)$$

### 8.2.2 Equações analíticas

Assumindo que não existe deslocamento ao longo do eixo z, ou seja, assumindo estado plano de deformação, a solução completa das tensões, em coordenadas cilíndricas, é dada por [17]:

$$\sigma_r = \left( \frac{\sigma_x^o + \sigma_y^o}{2} \right) \left( 1 - \frac{r_w^2}{r^2} \right) + \left( \frac{\sigma_x^o - \sigma_y^o}{2} \right) \left( 1 + 3\frac{r_w^4}{r^4} - 4\frac{r_w^2}{r^2} \right) \cos 2\theta + \tau_{xy}^o \left( 1 + 3\frac{r_w^4}{r^4} - 4\frac{r_w^2}{r^2} \right) \sin 2\theta + P_w \frac{r_w^2}{r^2} \quad (88)$$

$$\sigma_\theta = \left( \frac{\sigma_x^o + \sigma_y^o}{2} \right) \left( 1 + \frac{r_w^2}{r^2} \right) - \left( \frac{\sigma_x^o - \sigma_y^o}{2} \right) \left( 1 + 3\frac{r_w^4}{r^4} \right) \cos 2\theta - \tau_{xy}^o \left( 1 + 3\frac{r_w^4}{r^4} \right) \sin 2\theta - P_w \frac{r_w^2}{r^2} \quad (89)$$

$$\sigma_z = \sigma_z^o - \nu [2(\sigma_x^o - \sigma_y^o) \frac{r_w^2}{r^2} \cos 2\theta + 4\tau_{xy}^o \frac{r_w^2}{r^2} \sin 2\theta] \quad (90)$$

$$\tau_{r\theta} = \left( \frac{\sigma_y^o - \sigma_x^o}{2} \right) \left( 1 - 3\frac{r_w^4}{r^4} + 2\frac{r_w^2}{r^2} \right) \sin 2\theta + \tau_{xy}^o \left( 1 - 3\frac{r_w^4}{r^4} + 2\frac{r_w^2}{r^2} \right) \cos 2\theta \quad (91)$$

$$\tau_{\theta z} = (-\tau_{xz}^o \sin \theta + \tau_{yz}^o \cos \theta) \left( 1 + \frac{r_w^2}{r^2} \right) \quad (92)$$

$$\tau_{rz} = (\tau_{xz}^o \cos \theta + \tau_{yz}^o \sin \theta) \left( 1 - \frac{r_w^2}{r^2} \right) \quad (93)$$

Onde:

$\sigma_r$  = tensão radial;

$\sigma_\theta$  = tensão tangencial;

$\sigma_z$  = tensão axial;

$\tau_{r\theta}, \tau_{\theta z}, \tau_{rz}$  = tensões cisalhantes;

$P_w$  = pressão dentro do poço = pressão do fluido de perfuração;

$\nu$  = coeficiente de Poisson da formação;

$r_w$  = raio interno do poço;

$r$  = raio de afastamento a partir da parede do poço;

$\theta$  = posição ao redor da circunferência do poço.

Observa-se que as equações analíticas são função: do raio do poço ( $r_w$ ), raio de afastamento do poço ( $r$ ), da pressão dentro do poço na tensão radial ( $\sigma_r$ ) e tangencial ( $\sigma_\theta$ ), o coeficiente de Poisson ( $\nu$ ) afetando apenas a tensão axial ( $\sigma_z$ ) e tensões iniciais ( $\sigma^o$ ) em todos os casos.

As tensões cisalhantes são geralmente diferentes de zero, portanto  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$  e  $\sigma_z$  não são as tensões principais para orientações arbitrárias do poço.

As equações podem ser simplificadas quando avaliadas na parede poço, como segue:

$$\sigma_r = P_w \quad (94)$$

$$\sigma_\theta = \sigma_x^o + \sigma_y^o - 2(\sigma_x^o - \sigma_y^o)\cos 2\theta - 4\tau_{xy}^o \sin 2\theta - P_w \quad (95)$$

$$\sigma_z = \sigma_z^o - \nu (2(\sigma_x^o - \sigma_y^o)\cos 2\theta + 4\tau_{xy}^o \sin 2\theta) \quad (96)$$

$$\tau_{r\theta}=0 \quad (97)$$

$$\tau_{\theta z} = 2(-\tau_{xz}^o \sin \theta + \tau_{yz}^o \cos \theta) \quad (98)$$

$$\tau_{rz} = 0 \quad (99)$$

### 8.2.3 Equações analíticas em coordenadas cartesianas

Uma vez que o código de elementos finitos utiliza o sistema cartesiano como referência, é necessário transformar as equações analíticas para este mesmo sistema. Uma vez transformadas, é possível utilizá-las no cálculo de elementos finitos ou como comparação da solução aproximada.

A transformação do sistema de coordenadas do tensor de tensões analíticas  $\sigma_{an}$ , é obtida pelo giro do eixo z, conforme notação matricial abaixo:

$$\sigma'_{an} = R_{z*} \sigma_{an} R_{z*}^T \quad (100)$$



Onde:

$$\mathbf{R}_{z*} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{an} = \begin{pmatrix} \sigma_r & \sigma_{r\theta} & \sigma_{rz} \\ \sigma_{\theta r} & \sigma_{\theta} & \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{zr} & \sigma_{z\theta} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\sigma}'_{an} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

Portanto:

$$\sigma_x = \sigma_r \cos[\theta]^2 - 2\sigma_{r\theta} \cos[\theta] \sin[\theta] + \sigma_{\theta} \sin[\theta]^2 \quad (101)$$

$$\sigma_y = \sigma_{\theta} \cos[\theta]^2 + \sigma_r \sin[\theta]^2 + \sigma_{r\theta} \sin[2\theta] \quad (102)$$

$$\tau_{xy} = \sigma_{yx} = \frac{1}{2}(2\sigma_{r\theta} \cos[2\theta] + (\sigma_r - \sigma_{\theta}) \sin[2\theta]) \quad (103)$$

$$\tau_{xz} = \sigma_{zx} = \sigma_{rz} \cos[\theta] - \sigma_{\theta z} \sin[\theta] \quad (104)$$

$$\tau_{yz} = \sigma_{zy} = \sigma_{\theta z} \cos[\theta] + \sigma_{rz} \sin[\theta] \quad (105)$$

$$\sigma_z = \sigma_z \quad (106)$$

## 9 Modelagem Linear Elástica do Estado de Tensão ao Redor de Poços de Petróleo Inclinados pelo Método de Elementos Finitos (MEF)

### 9.1 O Método de Elementos Finitos

O método dos elementos finitos é uma técnica de aproximação numérica para problemas de valores de contorno. O método pode ser caracterizado pela técnica na qual um domínio é representado por um conjunto de subdomínios, os elementos finitos, permitindo construir sistematicamente as funções de aproximação necessárias de modo variacional ou peso-residual da solução de um problema sobre cada elemento. Os principais passos envolvidos para a análise de elementos finitos de um problema típico são, [31]:

- Discretização do domínio em um conjunto de elementos finitos pré-selecionados.
- Construção da formulação fraca para a equação diferencial governante.
- Seleção ou derivação das funções de interpolação.
- Desenvolvimento do modelo de elementos finitos utilizando a forma fraca.
- Assemblagem dos elementos finitos para obter o sistema global de equações algébricas.
- Imposição das condições de contorno do problema.
- Solução das equações assembladas.
- Pós-processamento da solução e outras quantidades de interesse: reproduzir os resultados em tabelas ou gráficos.

### 9.2 Discretização do domínio

A Figura 23 apresenta um exemplo de um domínio discretizado em elementos finitos. Onde:

$\Omega$  = domínio computacional;

$\delta\Omega$  = contorno do domínio, caracterizado por  $\delta\Omega_N$  (condição de contorno tipo Neumann) e  $\delta\Omega_D$  (condição de contorno tipo Dirichlet) ;

$\Omega_e$  = domínio do elemento;

$\Gamma$  = interface entre os elementos.

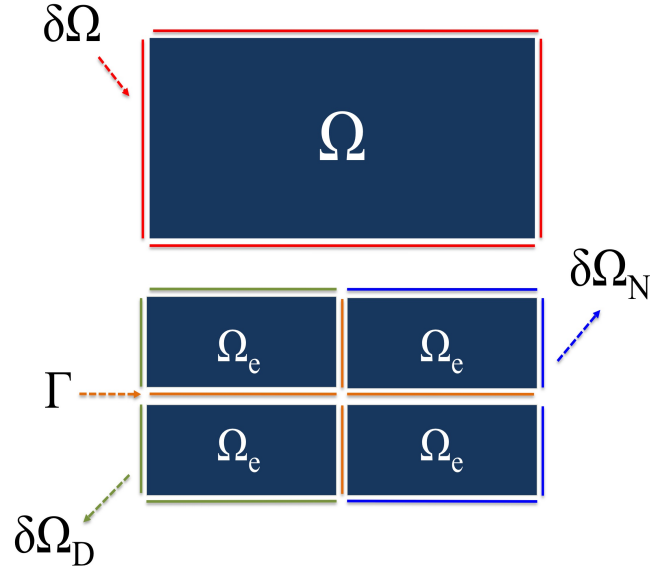


Figura 23: Discretização de um domínio em elementos finitos

A metodologia aplicada para a configuração da malha do poço será apresentada mais adiante.

### 9.3 Formulação variacional (2D)

Nesta seção será apresentada a formulação variacional de equilíbrio mecânico para o modelo linear elástico. Uma vez que o comprimento do poço é muito longo (podendo atingir quilômetros de comprimento) comparado com o domínio selecionado nas direções  $x$  e  $y$ , assumiu-se para este trabalho o estado plano de deformação, considerando portanto nulos os deslocamentos na direção  $z$ , conforme demonstrado no exemplo da Figura 10 no capítulo 4.

A simulação se torna portanto bi-dimensional, reduzindo significativamente o tempo de execução do simulador. Para isso, a malha de elementos finitos é selecionada como uma seção do poço conforme ilustrado na Figura 24.

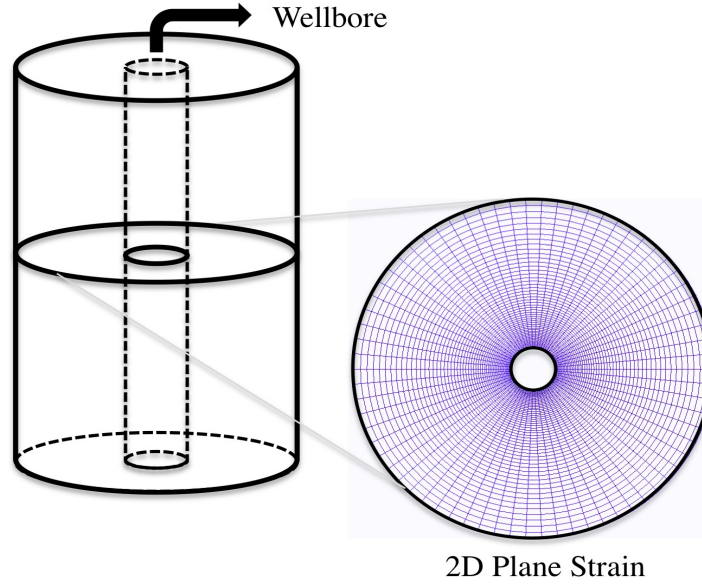


Figura 24: Malha bi-dimensional para o estado plano de deformação

### 9.3.1 Formulação fraca para o deslocamento

Deseja-se encontrar o vetor de deslocamentos  $\mathbf{u}$  do material elástico, a partir da equação de equilíbrio mecânico apresentada nas seções 3 e 4:

$$\text{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \mathbf{b} = 0 \quad (107)$$

Onde, pela relação tensão-deformação para condição linear elástica,

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\sigma}_0$$

E o tensor de deformação para duas dimensões, em função do vetor deslocamento  $\mathbf{u}$ , é representado por:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \frac{\partial u_y}{\partial y} \end{pmatrix}$$

em que

$$\begin{cases} \mathbf{u}(x, y), x \text{ e } y \in \Omega \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_D \text{ em } \delta\Omega_D \\ \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} = g \text{ em } \delta\Omega_N \end{cases}$$

Onde:

- $\mathbf{u}$  é o vetor deslocamento;
- $\Omega$  o domínio com contorno  $\delta\Omega$ ;
- $\delta\Omega_D$  e  $\delta\Omega_N$  os contornos com condição tipo Dirichlet e Neumann, com  $\delta\Omega_D \cup \delta\Omega_N = \delta\Omega$
- $\mathbf{u}_D$  e  $g$  são funções conhecidas e  $\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}$  o fluxo normal no contorno  $\delta\Omega_N$
- $\boldsymbol{\sigma}$  é o tensor de tensões, e  $\mathbf{b}$  o vetor de forças de corpo.

Deve-se definir nesse momento o espaço de aproximação sobre o qual serão definidas as funções teste e tentativa. Deseja-se portanto, encontrar  $\mathbf{u}$  no espaço de funções  $H^1$ , de modo que:

$$H^1(\Omega) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega); \nabla \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega)\} \quad (108)$$

Onde  $L^2(\Omega)$  indica o espaço de funções quadrado integráveis.

Define-se também:

$$V(\Omega) = \{\mathbf{v} \in H^1(\Omega); \mathbf{v} = 0 \text{ em } \delta\Omega_D\} \quad (109)$$

Multiplicando-se a Equação 107 por uma função teste  $\mathbf{v} \in V(\Omega)$  e integrando sobre qualquer domínio  $\Omega$ , obtém-se:

$$\int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot (\text{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \mathbf{b}) d\Omega = 0 \quad (110)$$

Onde pelo teorema da divergência,

$$\int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \text{div}(\boldsymbol{\sigma}) d\Omega = \int_{\delta\Omega} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} ds - \int_{\Omega} \nabla \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma} d\Omega \quad (111)$$

chegando-se então a,

$$-\int_{\Omega} \nabla \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \int_{\delta\Omega} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} ds + \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{b} d\Omega = 0 \quad (112)$$

Pode-se observar que a formulação variacional (Equação 112) corresponde ao Princípio do Trabalho Virtual, para um campo de deslocamento  $\mathbf{v}$ .

De maneira equivalente, sobre os elementos, tem-se a Equação 112 reescrita na forma:

$$-\sum_{\Omega_e} \int \nabla \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \sum_{\delta\Omega_e} \int \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} ds + \sum_{\Omega_e} \int \mathbf{v} \cdot \mathbf{b} d\Omega = 0 \quad (113)$$

Onde,

$$\sum_{\delta\Omega_e} \int \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} ds = \int_{\Gamma} \llbracket \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \rrbracket + \int_{\delta\Omega_D} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} ds + \int_{\delta\Omega_N} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} ds \quad (114)$$

Sendo em  $\Gamma$  a porção do domínio com condição de contorno na interface entre os elementos,  $\delta\Omega_D$  a parte do contorno onde a condição de Dirichlet será aplicada e  $\delta\Omega_N$  a parte da superfície onde a condição de Neumann será aplicada.

Assumindo-se fracamente que o salto do fluxo entre os elementos:

$$\int_{\Gamma} \llbracket \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \rrbracket \approx 0 \quad (115)$$

e

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = g \text{ em } \delta\Omega_N \quad (116)$$

Impõe-se também que:

$$\mathbf{v} = 0 \text{ em } \delta\Omega_D \quad (117)$$

Então,

$$\sum_{\Omega_e} \int \nabla \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma} d\Omega - \sum_{\Omega_e} \int \mathbf{v} \cdot \mathbf{b} d\Omega - \int_{\delta\Omega_N} \mathbf{v} \cdot g ds = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in V \quad (118)$$

Portanto a formulação variacional do problema pode ser enunciada conforme apresentado em [18]: deseja-se encontrar  $\mathbf{u} \in H^1(\Omega)$  com  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_D$  em  $\delta\Omega_D$  tal que:

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V(\Omega)$$

Onde,

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{\Omega_e} \int \nabla \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega$$

$$f(\mathbf{v}) = \sum_{\Omega_e} \int \mathbf{v} \cdot \mathbf{b} \, d\Omega + \int_{\delta\Omega_N} \mathbf{v} \cdot \mathbf{g} \, ds$$

### 9.3.2 Implementação computacional da formulação variacional

O problema vetorial é expandido escalarmente no ambiente NeoPZ, desse modo, a formulação variacional é implementada conforme será apresentado.

Sabendo que:

$$(\nabla \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}^T \cdot \nabla \mathbf{v}) = \sigma_{xx} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \tau_{xy} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) + \sigma_{yy} \frac{\partial v_y}{\partial y}$$

Substituindo-se na formulação fraca do modelo, temos com respeito a direção x, onde  $v_y = 0$ :

$$\sum_{\Omega_e} \int \left( \sigma_{xx} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) d\Omega = \sum_{\Omega_e} \int v_x b_x d\Omega + \int_{\delta\Omega_N} v_x g_x ds \quad (119)$$

Do mesmo modo, com respeito a direção y, onde  $v_x = 0$ :

$$\sum_{\Omega_e} \int \left( \tau_{xy} \frac{\partial v_y}{\partial x} + \sigma_{yy} \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) d\Omega = \sum_{\Omega_e} \int v_y b_y d\Omega + \int_{\delta\Omega_N} v_y g_y ds \quad (120)$$

## Elasticidade

Utilizando as definições apresentadas no capítulo 4 para o material linear elástico e assumindo estado plano de deformação, temos as tensões em termos dos deslocamentos:

$$\sigma_{xx} = \frac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) + \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \left( \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) + \sigma_x^o$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)} \left( \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) + \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) + \sigma_y^o$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + \tau_{xy}^o$$

Onde,  $\sigma_x^o$ ,  $\tau_{xy}^o$  e  $\sigma_y^o$  são tensões iniciais definidas pelas tensões confinantes da formação.

Substituindo na formulação fraca do problema chega-se então, com respeito às direções x e y, respectivamente:

$$\begin{aligned} \sum_{\Omega_e} \int \left[ \sigma_x^o + \frac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) + \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \left( \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) \right] \frac{\partial v_x}{\partial x} + \left[ \tau_{xy}^o + \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \right] \frac{\partial v_x}{\partial y} d\Omega \\ = \sum_{\Omega_e} \int v_x b_x d\Omega + \int_{\delta\Omega_N} v_x g_x ds \end{aligned} \quad (121)$$

$$\begin{aligned} \sum_{\Omega_e} \int \left[ \tau_{xy}^o + \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \right] \frac{\partial v_y}{\partial x} + \left[ \sigma_y^o + \frac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)} \left( \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) + \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) \right] \frac{\partial v_y}{\partial y} d\Omega \\ = \sum_{\Omega_e} \int v_y b_y d\Omega + \int_{\delta\Omega_N} v_y g_y ds \end{aligned} \quad (122)$$

## 9.4 Aproximação de Galerkin

Na aproximação de Galerkin, em vez de tentar solucionar o problema dimensionalmente infinito de todo o espaço  $H^1$ , busca-se uma solução aproximada  $\mathbf{u}_N$  que pertença a um sub-espaço  $V^N \subset H^1$  de dimensão finita, [18]. Desse modo,  $\mathbf{u}_N$  se expressa como uma combinação linear de funções de base  $\phi_i \in V^N$ .

$$\mathbf{u}_N(x, y) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \phi_i(x, y) \quad (123)$$

Conhecida as funções de base  $\phi_i(x, y)$ ,  $\mathbf{u}_N$  pode ser determinado uma vez que  $\alpha_i$  for calculado.  $N$  é o número de funções no espaço.

As funções-teste são escolhidas da mesma maneira, em sub-espaços  $V_0^N \subset V(\Omega)$  de dimensão finita.

$$\mathbf{v}(x, y) = \sum_{i=1}^N \gamma_i \phi_i(x, y) \quad (124)$$

Sendo  $\gamma_i$  constantes.



Então, para a direção x:

$$\begin{aligned} \sum_{\Omega_e} \int \left( [\sigma_x^o \frac{\partial \gamma_i \phi_i}{\partial x} + \frac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)} \left[ \frac{\partial \alpha_{xj} \phi_j}{\partial x} \frac{\partial \gamma_i \phi_i}{\partial x} \right] + \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \left[ \frac{\partial \alpha_{yj} \phi_j}{\partial y} \frac{\partial \gamma_i \phi_i}{\partial x} \right] ] + \right. \\ \left. [\tau_{xy}^o \frac{\partial \gamma_i \phi_i}{\partial y} + \frac{E}{2(1+\nu)} \left[ \frac{\partial \alpha_{xj} \phi_j}{\partial y} \frac{\partial \gamma_i \phi_i}{\partial y} \right] + \frac{E}{2(1+\nu)} \left[ \frac{\partial \alpha_{yj} \phi_j}{\partial x} \frac{\partial \gamma_i \phi_i}{\partial y} \right] ] d\Omega = \right. \\ \left. \sum_{\Omega_e} \int \gamma_i \phi_i b_x d\Omega + \int_{\delta\Omega_N} \gamma_i \phi_i g_x ds \right. \end{aligned} \quad (125)$$

$$K_{11e} = \alpha_{xj} \gamma_i \left[ \sum_{\Omega_e} \int \left[ \frac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)} \left[ \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \right] + \frac{E}{2(1+\nu)} \left[ \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \right] \right] d\Omega \right] \quad (126)$$

$$K_{12e} = \alpha_{yj} \gamma_i \left[ \sum_{\Omega_e} \int \left[ \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \left[ \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \right] + \frac{E}{2(1+\nu)} \left[ \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \right] \right] d\Omega \right] \quad (127)$$

$$F_{11e} = \gamma_i \left[ \sum_{\Omega_e} \int \phi_i b_x d\Omega + \int_{\delta\Omega_N} \phi_i g_x - \sum_{\Omega_e} \int \left[ \sigma_x^o \frac{\partial \phi_i}{\partial x} + \tau_{xy}^o \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \right] d\Omega \right] \quad (128)$$

Para a direção y:

$$\begin{aligned} \sum_{\Omega_e} \int \left[ \tau_{xy}^o \frac{\partial \gamma_i \phi_i}{\partial x} + \frac{E}{2(1+\nu)} \left[ \frac{\partial \alpha_{xj} \phi_j}{\partial y} \frac{\partial \gamma_i \phi_i}{\partial x} \right] + \frac{E}{2(1+\nu)} \left[ \frac{\partial \alpha_{yj} \phi_j}{\partial x} \frac{\partial \gamma_i \phi_i}{\partial x} \right] \right] + \\ \left[ \sigma_y^o \frac{\partial \gamma_i \phi_i}{\partial y} + \frac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)} \left[ \frac{\partial \alpha_{yj} \phi_j}{\partial y} \frac{\partial \gamma_i \phi_i}{\partial y} \right] + \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \left[ \frac{\partial \alpha_{xj} \phi_j}{\partial x} \frac{\partial \gamma_i \phi_i}{\partial y} \right] \right] d\Omega = \\ \sum_{\Omega_e} \int \gamma_i \phi_i b_y d\Omega + \int_{\delta\Omega_N} \gamma_i \phi_i g_y ds \end{aligned} \quad (129)$$

$$K_{21e} = \alpha_{xj} \gamma_i \left[ \sum_{\Omega_e} \int \left[ \frac{E}{2(1+\nu)} \left[ \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \right] + \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \left[ \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \right] \right] d\Omega \right] \quad (130)$$

$$K_{22e} = \alpha_{yj} \gamma_i \left[ \sum_{\Omega_e} \int \left[ \frac{E}{2(1+\nu)} \left[ \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \right] + \frac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)} \left[ \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \right] \right] d\Omega \right] \quad (131)$$

$$F_{22e} = \gamma_i \left[ \sum_{\Omega_e} \int \phi_i b_y d\Omega + \int_{\delta\Omega_N} \phi_i g_y ds - \sum_{\Omega_e} \int \left[ \tau_{xy}^o \frac{\partial \phi_i}{\partial x} + \sigma_y^o \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \right] d\Omega \right] \quad (132)$$

Portanto,

$$\sum_{j=1}^N (\mathbf{K}_{ij} \boldsymbol{\alpha}_j = \mathbf{F}_i) \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (133)$$

Ou,

$$\mathbf{K} \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{F} \quad (134)$$

Sendo,

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F} \quad (135)$$

Onde  $\mathbf{K}$  é a matriz de rigidez e  $\mathbf{F}$  o vetor de carga nas direções x e y.

## 9.5 Pós-processamento da solução

Uma vez encontrados os deslocamentos e suas derivadas,

$$\mathbf{u}_N(x, y) = \sum_{i=1}^N \boldsymbol{\alpha}_i \phi_i(x, y)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}_{N\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{x}} = \sum_{i=1}^N \boldsymbol{\alpha}_{xi} \frac{\partial \phi_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{x}} \quad (136)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}_{N\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{y}} = \sum_{i=1}^N \boldsymbol{\alpha}_{xi} \frac{\partial \phi_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{y}} \quad (137)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}_{N\mathbf{y}}}{\partial \mathbf{x}} = \sum_{i=1}^N \boldsymbol{\alpha}_{yi} \frac{\partial \phi_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{x}} \quad (138)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}_{N\mathbf{y}}}{\partial \mathbf{y}} = \sum_{i=1}^N \boldsymbol{\alpha}_{yi} \frac{\partial \phi_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{y}} \quad (139)$$

é possível calcular as deformações,

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \frac{\partial u_y}{\partial y} \end{pmatrix}$$

e consequentemente o estado de tensão  $\sigma$  por,

$$\sigma = \mathbf{C} \varepsilon + \sigma_0$$

Onde na equação acima os dois primeiros termos do lado direito se referem à variação da tensão e o segundo termo é relativo às tensões iniciais.

## 9.6 Transformação do Elemento

Para que os cálculos de elementos finitos sejam realizados sobre um elemento curvilíneo  $\Omega_e$  no plano x-y, faz-se necessário uma transformação de coordenadas ou mapeamento dos pontos de um elemento mestre  $\hat{\Omega}$  para os pontos em cada elemento, [4]. Os cálculos poderão portanto serem realizados de maneira simples sobre o elemento mestre  $\hat{\Omega}$ , por meio do mapeamento inversível  $T_e$  sobre  $\hat{\Omega}$  para  $\Omega_e$ .

Considerando por exemplo um elemento  $\hat{\Omega}$  quadrilátero, conforme Figura 25, cujas coordenadas locais são  $\xi$  e  $\eta$  e satisfazem  $-1 \leq \xi \leq +1$  e  $-1 \leq \eta \leq +1$ , o mapeamento  $T_e$  de  $\hat{\Omega}$  para  $\Omega_e$  é introduziado por meio da mudança de coordenadas:

$$T_e: \begin{aligned} x &= x(\xi, \eta) \\ y &= y(\xi, \eta) \end{aligned} \tag{140}$$

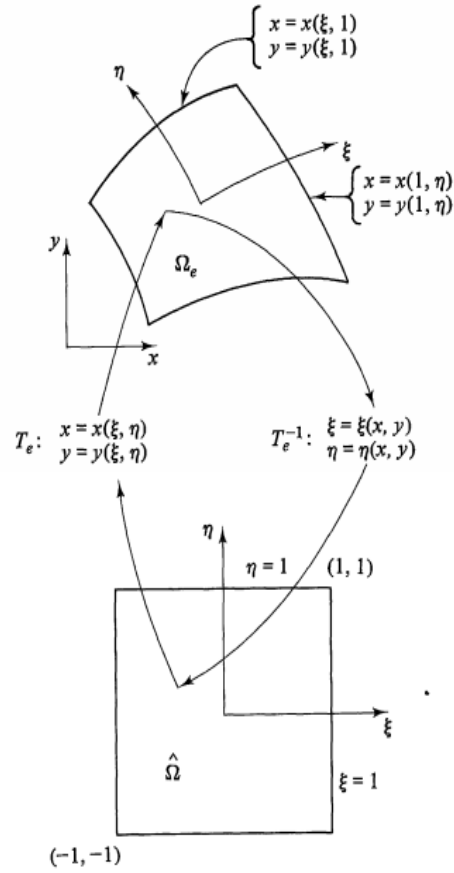


Figura 25: Mapeamento do elemento finito  $\Omega_e$  no plano  $x, y$  para  $\xi, \eta$  por meio da transformação  $T_e$  - Obtido de [4]

## 9.7 Funções de Base - Elementos Quadriláteros

Um detalhe importante no método dos elementos finitos, é que a qualidade da aproximação é fortemente determinada pela escolha das funções de base  $\phi_i$ , [4]. Uma vez bem selecionadas, a determinação dos coeficientes  $\alpha_j$  se reduz a um problema computacional. Deve-se seguir os seguintes critérios:

- Determinar as funções por elemento;
- As funções devem ser suaves o suficiente para pertencer ao espaço  $H^1$ ;

O modelo apresentado neste trabalho foi implementado utilizando elementos quadriláteros em sua malha. Elementos finitos quadriláteros são aqueles que apresentam quatro lados em sua geometria, sendo eles retos ou não.

Na biblioteca NeoPZ, são utilizadas funções de base hierárquicas para estabelecer os espaços de aproximação de elementos finitos, [35]. As funções de base para elementos quadriláteros de ordem dois, podem ser representadas por:

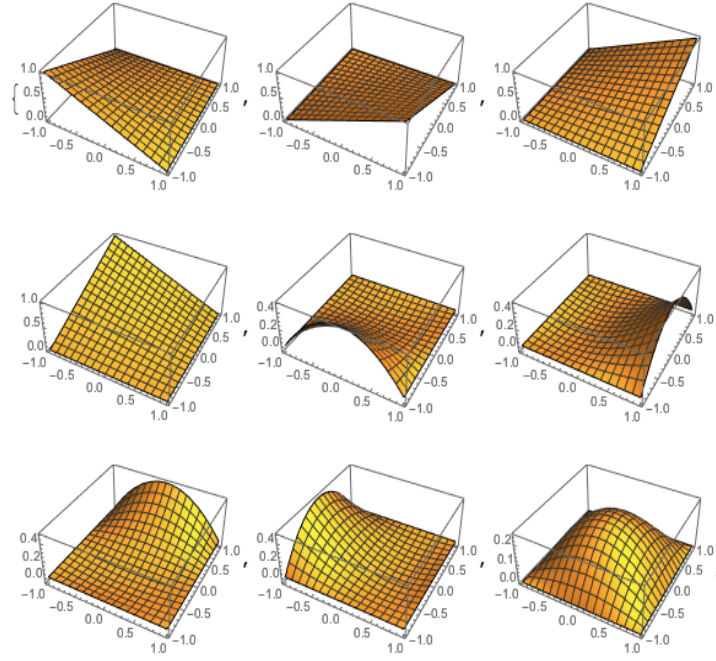


Figura 26: Funções de base de ordem 2

## 9.8 Taxas de Convergência

O erro de uma aproximação pode ser definido pela diferença entre a solução exata e a solução aproximada:

$$\mathbf{e} = \mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}} \quad (141)$$

Uma vez que os erros são funções, deve-se obter medidas significativas da magnitude dessas funções para que seja possível discutir a acurácia das soluções. Uma medida natural e universalmente utilizada para a magnitude de uma função  $\varrho$  é um número não negativo, associado a  $\varrho$ , chamado “a norma de  $\varrho$ ” :  $\|\varrho\|$ , [4]. Existem três principais normas de erros comumente utilizadas no método dos elementos finitos: a norma de energia  $\|\mathbf{e}\|_E$ , a norma  $L^2$   $\|\mathbf{e}\|_0$  e a norma infinita  $\|\mathbf{e}\|_\infty$ .

Busca-se geralmente estimativas assintóticas desses erros nas aproximações de elementos finitos.

Dado um domínio discretizado por um número de elementos de comprimento  $h$ , refina-se a malha diminuindo  $h$  e consequentemente aumentando o número de elementos. Deseja-se portanto com este método conhecer o limite dos erros, medindo-os nas normas precedentes. Essa estimativa possui a seguinte forma:

$$\| \mathbf{e} \| \leq Ch^p \quad (142)$$

Onde,  $C$  é uma constante dependente dos dados do problema e  $p$  é uma medida de taxa de convergência do método com respeito à escolha da norma  $\| \cdot \|$ .

Um gráfico do  $\log \| \mathbf{e} \|$  x  $\log h$  produzirá uma linha reta. Para valores de  $h$  suficientemente pequenos, a reta tem como inclinação a taxa de convergência com respeito à norma  $\| \cdot \|$ . A Figura 27, apresenta o gráfico log-log dos erros  $\| \mathbf{e} \|_E$  e  $\| \mathbf{e} \|_0$  de um problema modelo.

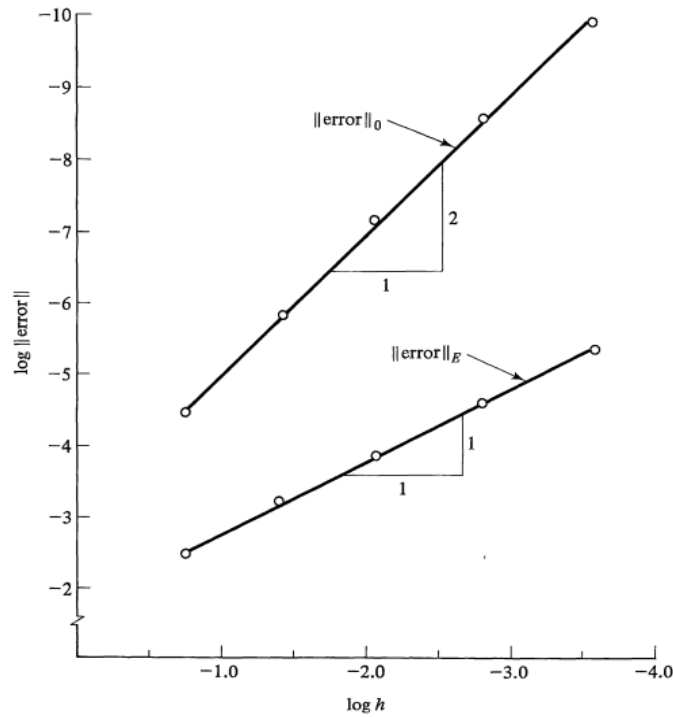


Figura 27: Gráfico log-log dos erros  $\| \mathbf{e} \|_E$  e  $\| \mathbf{e} \|_0$  de um problema modelo. Obtido de [4]

Neste trabalho será utilizada a norma de energia para verificar a magnitude do erro. A norma de energia, em problemas de elasticidade, é dada pela expressão, [32]:

$$\| \mathbf{e} \|_E^2 = \int_{\Omega} (S\mathbf{e})^T C (S\mathbf{e}) d\Omega \quad (143)$$

Sendo  $S$  o operador diferencial que relaciona a deformação em função dos deslocamentos.

A expressão pode ser reescrita como:

$$\| \mathbf{e} \|_E^2 = \int_{\Omega} (S(\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}))^T C (S(\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}})) d\Omega = \int_{\Omega} (\boldsymbol{\varepsilon} - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}})^T C (\boldsymbol{\varepsilon} - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}) d\Omega = \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma} - \hat{\boldsymbol{\sigma}})^T C^{-1} (\boldsymbol{\sigma} - \hat{\boldsymbol{\sigma}}) d\Omega \quad (144)$$

A norma de energia dos erros da solução numérica será apresentada mais adiante de acordo com exemplos simulados.

## 10 Implementação Computacional

### 10.1 C++

C++ é uma linguagem de programação desenvolvida a partir de outra linguagem chamada C. O C++ foi desenvolvido por Bjarne Stroustrup na Bell Laboratories na década de 80. O C++ possui capacidade para programação orientada a objetos, aprimorando vários recursos da linguagem C. Esses recursos oferecem para o programador maior facilidade de entendimento, modificação e correção, [13].

A programação orientada a objetos permite ao programador implementações de projetos como um sistema de software funcional. A unidade de programação no C++ é a classe, onde os objetos são instanciados (criados). Nessas classes estão as funções que implementam operações e dados que implementam atributos.

### 10.2 NeoPZ: um ambiente orientado a objetos para simulação de elementos finitos

O ambiente NeoPZ é um ambiente orientado a objetos para o desenvolvimento de simulações de elementos finitos. O termo “ambiente” se refere à uma extensão do software, na qual permite ao programador implementar qualquer algoritmo de elementos finitos, desde que se encaixe na estrutura das classes, [16].

O ambiente NeoPZ divide-se em pastas, as quais possuem diversas classes com funções específicas para a resolução do problema de elementos finitos. Pode-se destacar as seguintes divisões no ambiente, [8] e [35]:

- **Geom:** implementa a geometria de elementos 1D, 2D e 3D bem como funções de mapeamento;
- **Shape:** composto pelas classes de construção das funções de forma de acordo com a geometria;
- **Material:** implementa as equações diferenciais do problema de interesse;
- **Mesh:** implementa as malhas geométrica e computacional. O ambiente NeoPZ faz uma distinção entre malha geométrica e computacional. A malha geométrica define a discretização espacial do domínio e a malha computacional relaciona o espaço de interpolação da solução. As duas malhas trocam informações entre si e são inter-referenciadas;



- Analysis: reúne e soluciona o sistema de equação do problema para variados graus polinomiais;
- Matrix: implementa diferentes tipos de matrizes, tais como: como skyline, banda, esparsa, etc;
- StrMatrix: composta por classes que encapsulam o armazenamento de matrizes;
- LinearSolver: implementa os métodos de condicionamento e resolução de sistemas de equações;
- Post: formado pelas classes que implementam o pós processamento da solução e a saída para pós-processadores, como por exemplo em formato *VTK*.

### 10.2.1 TPZElasticity2D

A classe *TPZElasticity2D* foi implementada na pasta Material por Omar Duran e Philippe Devloo em 2014. Essa classe implementa a formulação variacional de problemas de elasticidade para os casos: estado plano de deformação e estado plano de tensão.

O desenvolvimento deste trabalho exigiu adaptações na classe *TPZElasticity2D* para:

- Cálculo de tensões iniciais (*PreStress*) locais ao poço inclinado;
- Implementação da solução analítica, permitindo sua utilização como condição de contorno e cálculo de *PreStress* ao longo do domínio;
- Implementação de variáveis pós-processadas da solução inclinada e projetada na malha, como: tensor de tensões, tensor de deformação, invariantes e funções de escoamento.

### 10.2.2 TPZGraphEl - Pós processamento

A visualização das soluções também exigiu alterações nas classes de pós-processamento do ambiente NeoPZ. As coordenadas da malha são recalculadas no pós-processamento, de acordo com a disposição requerida pelo usuário (inclinada ou projetada). Esse processo foi implementado na classe *TPZGraphEl* encontrado na pasta *Post*.

Resumindo, o código executa o problema de elementos finitos sobre o plano x e y e em seguida as coordenadas são inclinadas ou projetadas, conforme escolha do usuário. A nova malha é então gerada em formato *VTK*, permitindo sua visualização no programa *ParaView*.

### 10.3 Malha

A metodologia de discretização espacial utilizada neste trabalho foi adaptada da tese de doutorado de Cecílio (2014). O método de construção da malha no código teve como objetivo refinar significativamente o espaço próximo à parede do poço onde há maior solicitação mecânica. A partir de uma progressão geométrica, grande quantidade dos elementos se concentram próximo à cavidade do poço e um número reduzido de elementos complementa a malha no *farfield*, onde há pouca variação no estado mecânico inicial.

Inicialmente é definido o comprimento do primeiro elemento ( $sz_{el}$ ), a seguir, juntamente com os valores do comprimento radial do domínio ( $r_{length}$ ) e número de elementos entre a parede do poço até o contorno externo da malha ( $el_{rad}$ ), é possível calcular a progressão geométrica ( $q$ ) do problema por meio do método “*GeometricProgression*” existente no ambiente NeoPZ.

Onde:

$$sz_{el} = 2\pi \frac{r_w}{el_{circ}} \left( \frac{L}{L_{circ}} \right) \quad (145)$$

Sendo:

$r_w$  = raio do poço;

$el_{circ}$  = número de elementos no contorno circular do poço;

$\left( \frac{L}{L_{circ}} \right)$  = proporção do primeiro elemento (parede do poço), definido pelo usuário.

Posteriormente, obtém-se as coordenadas dos nós pelas equações:

$$x = (r_w + \sum_{i=1}^{el_{rad}} sz_{el} \cdot q) \cos[\theta] \quad (146)$$

$$y = (r_w + \sum_{i=1}^{el_{rad}} sz_{el} \cdot q) \sin[\theta] \quad (147)$$

Onde  $\theta$  varia entre  $[0, 2\pi]$ .

Conforme ilustrado na Figura 28, a malha irá envolver a parede do poço, perpendicularmente ao seu eixo.

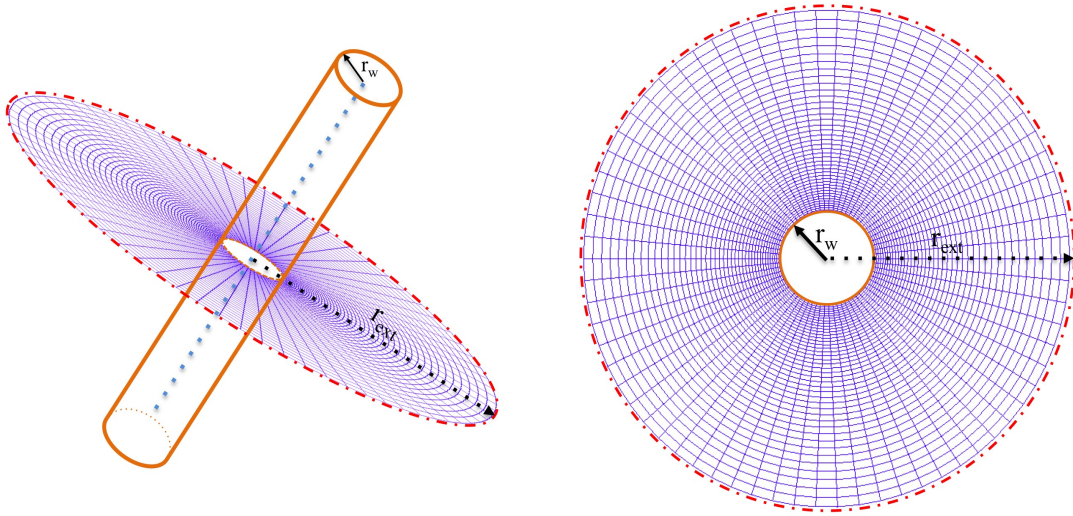


Figura 28: Esquema da malha de elementos finitos ao redor do poço inclinado

Uma vez que o número de elementos radiais e circunferenciais, ( $el_{rad}$  e  $el_{circ}$ ) são quantidades definidas pelo usuário, o código permite que o próprio usuário estabeleça o melhor refinamento da malha que considerar conveniente, de acordo com a capacidade da máquina utilizada. A Figura 29 apresenta o aumento de  $el_{rad}$  e  $el_{circ}$  conforme descrito:

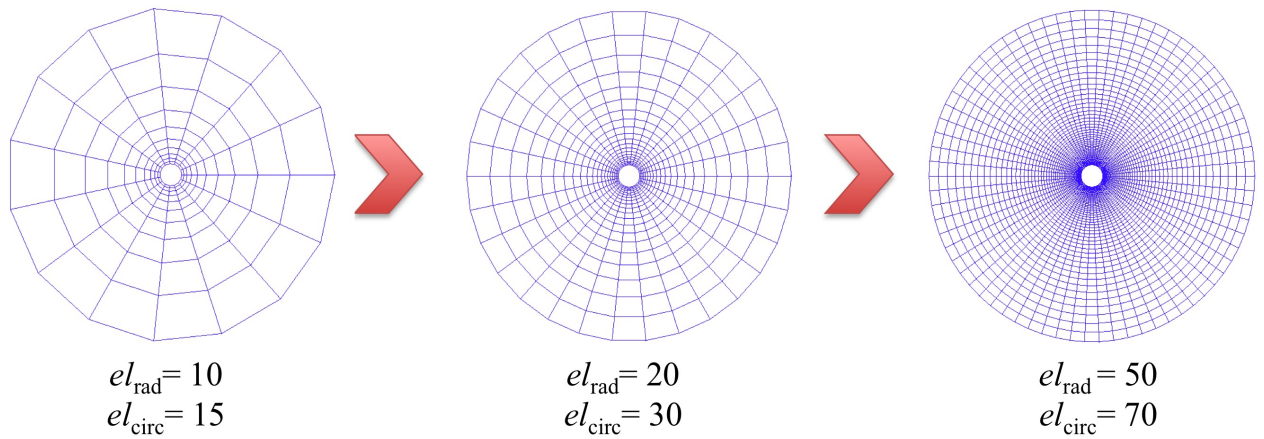


Figura 29: Refinamento da malha conforme o número de elementos

Nota-se que quanto maior o número de elementos, mais circular se torna a geometria da malha.

## 10.4 Condições de Contorno

A configuração das condições de contorno iniciais é essencial para a solução e boa aproximação do problema a ser resolvido. No caso 2D apresentado neste trabalho, foi estabelecida a seguinte configuração:

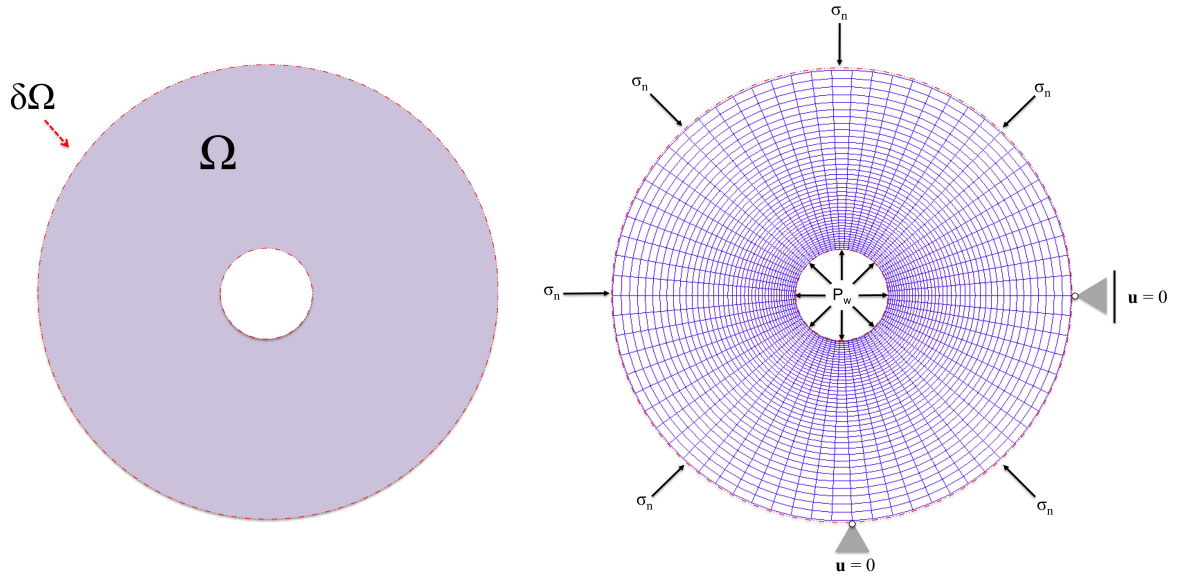


Figura 30: Condições de Contorno

Onde  $g_w$  é a força por unidade de área atuando na parede do poço, dada pela pressão do fluido de perfuração. O vetor  $g_f$  é composto pelas tensões atuando no farfield e  $\mathbf{u}$  é o vetor deslocamento nulo nos pontos representados para evitar movimento de corpo rígido. Ou seja:

$$\begin{aligned} g_w &= P_w \mathbf{n} \\ g_f &= \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \\ \mathbf{u}(x, y) &= 0 \end{aligned} \tag{148}$$

### 10.4.1 Utilização da solução analítica como tensões iniciais e condição de contorno

O código implementado permite a utilização das equações analíticas como tensões iniciais ( $\sigma_0$ ) ao longo do domínio, bem como para as condições de contorno no *farfield* e na parede do poço. A utilização das equações analíticas nesses casos, tem como objetivo evitar efeitos de contorno em implementações de outros modelos, tais como o modelo elastoplástico.

O uso desse método também permite verificar o código implementado, pois conhecendo-se os valores exatos das funções no domínio, a solução pelo método de elementos finitos se torna zero ou muito próxima de zero.

### 10.5 Desprezando o efeito da gravidade

Considerando-se densidade da rocha de  $\rho_r = 2.5 \text{ g/cm}^3$  para o arenito, rocha que será considerada posteriormente nas simulações, e inclinação de 45 graus para uma malha de 2 metros, a pressão de sobrecarga na formação irá variar em aproximadamente 34.68 KPa, (ver apêndice). Uma vez que a ordem de grandeza das tensões de confinamento, bem como da pressão interna do poço é de Mega Pascal, assume-se que a influência gravitacional pode ser desprezada.

### 10.6 Visualização Gráfica

O código implementado permite que o usuário obtenha a visualização gráfica da solução de duas maneiras:

- 1) Sobre o plano perpendicular ao eixo do poço;
- 2) Um plano projetado sobre uma seção horizontal ao eixo do poço.

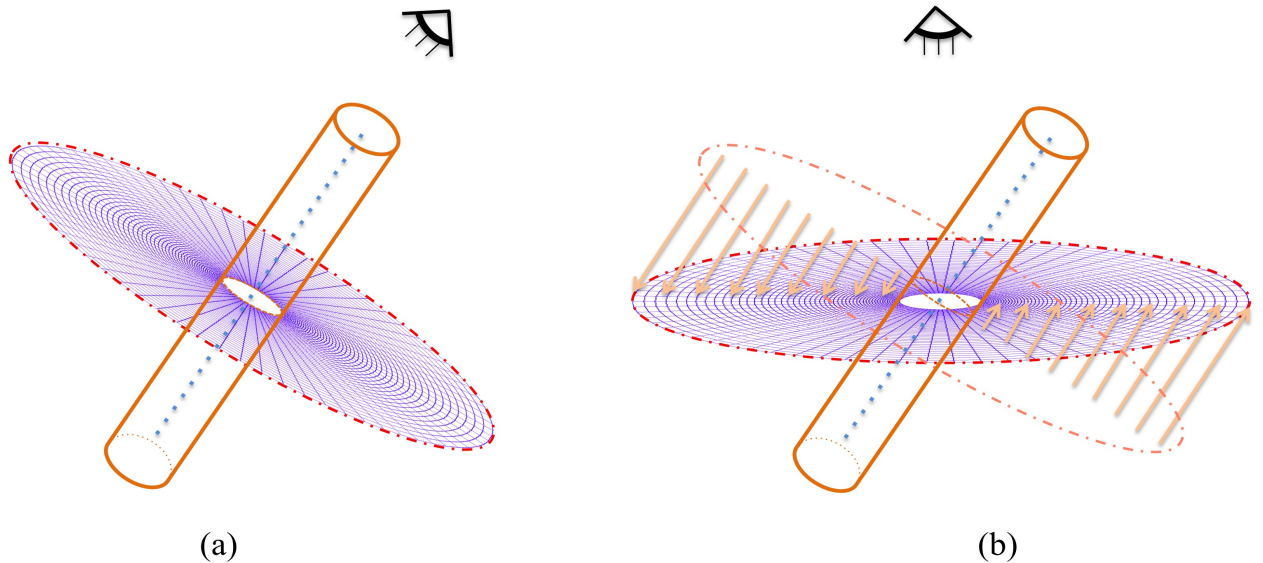


Figura 31: Visualizações da solução na malha: (a) Malha perpendicular ao eixo do Poço e (b) Malha projetada em corte horizontal ao eixo do Poço

A Figura 31 ilustra o ponto de referência da solução gráfica.

A transformação da malha e a nova solução projetada são calculados sobre o resultado obtido pela simulação da malha perpendicular. O tensor de tensões é rotacionado sobre a nova malha.

As novas coordenadas  $(x_p, y_p, z_p)$  são adquiridas por:

$$\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} + \kappa \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} \quad (149)$$

Onde  $x_i, y_i, z_i$  são as coordenadas iniciais,  $(x_n, y_n, z_n)$  é o vetor normal ao eixo do poço e  $\kappa$  é o fator de escala para que  $z_p = 0$ , portanto:

$$\kappa = -\frac{z_i}{z_n}$$

As Figuras 32 e 33 ilustram a projeção da malha. Na Figura 32 observa-se em (a) um quarto de malha com coordenadas iniciais representadas pelos pontos em azul e os pontos em vermelho representam esse mesmo um quarto de malha após sofrer alteração em sua direção e inclinação, suas respectivas normais podem ser observadas em (b). Os pontos pretos em (c) representam a projeção desse um quarto de malha. A Figura 33 ilustra esses mesmos conceitos para uma malha cheia ao redor de um poço.

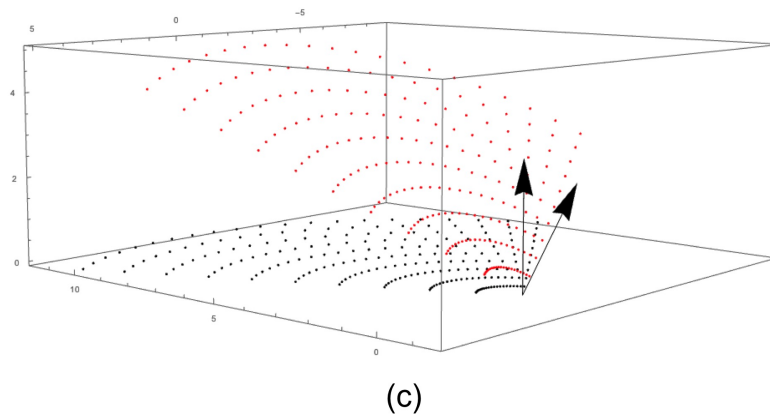
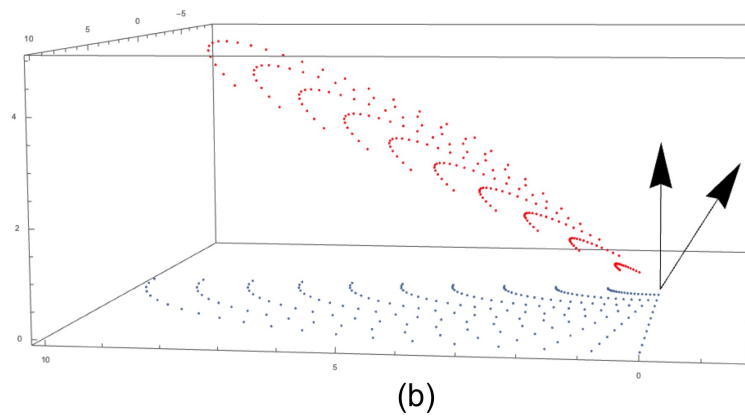
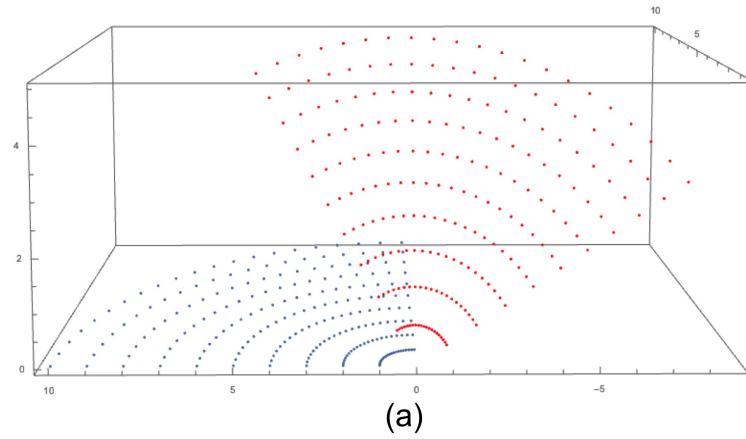


Figura 32: Projeção de  $\frac{1}{4}$  de malha: (a) Malha com coordenadas iniciais (em azul) e com uma dada direção e inclinação (em vermelho) (b) Representação de suas respectivas normais ao eixo do poço (c) Malha projetada sobre o plano horizontal (em preto)

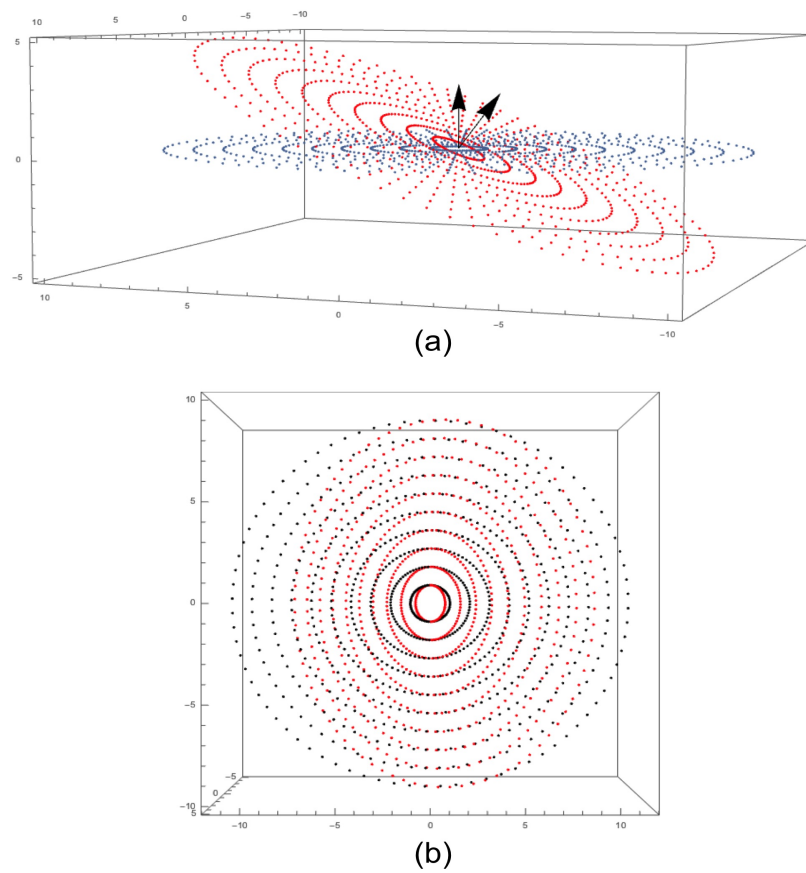


Figura 33: Projeção de uma malha compelta: (a) Malha com coordenadas iniciais (em azul) e com direção e inclinação (em vermelho) com suas respectivas normais (b) Malha projetada sobre o plano horizontal (em preto)

## 10.7 Fluxograma do código

O usuário irá percorrer, essencialmente, o fluxograma da Figura 34 para chegar à solução do método de elementos finitos.



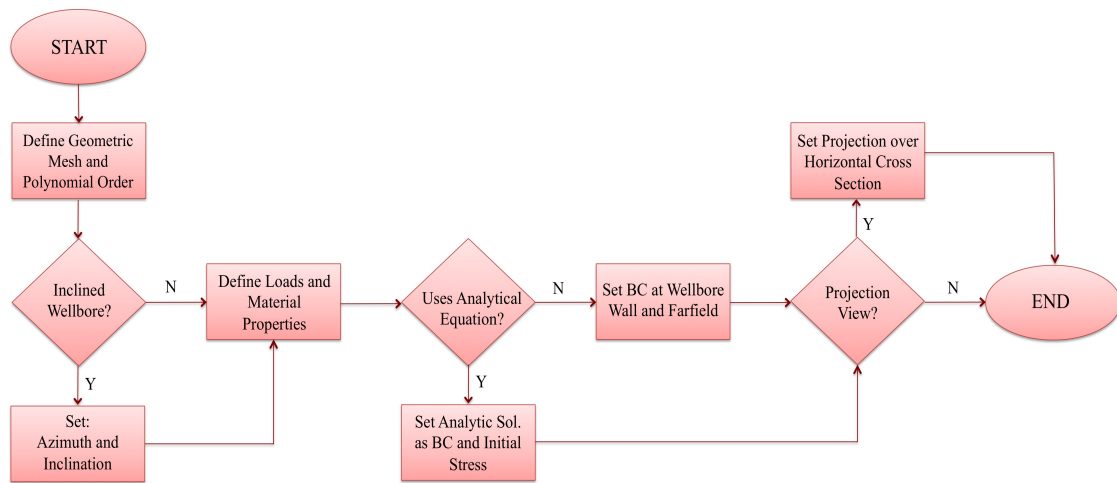


Figura 34: Fluxograma do código para a solução do modelo

## 11 Resultados e Discussões

Serão apresentados a seguir alguns exemplos do estado de tensão ao redor de poços inclinados utilizando o simulador desenvolvido. As simulações demonstradas permitem visualização perpendicular, projetada e inclinada da malha, bem como suas respectivas soluções. A verificação da solução numérica com a solução analítica também será apresentada.

Os dados de entrada do Exemplos podem ser observados na Tabela 2. A convenção de sinal adotada para as tensões é positivo para tração e negativo para compressão. As tensões confinantes iniciais ( $\sigma_V, \sigma_H$  e  $\sigma_h$ ) e a pressão do poço ( $P_w$ ) variam em cada cenário de operação, os valores simulados nos exemplos a seguir foram adaptados de Cecílio (2014), [8], com valores arredondados de modo a facilitar a visualização das soluções nos gráficos. As tensões confinantes horizontais simuladas neste trabalho foram selecionadas de modo a serem diferentes, uma vez que se forem iguais, o problema se torna trivial.

<b>Wellbore Radius</b>	<b>0.1</b>	<b>Meters</b>
<b>External Radius</b>	<b>2</b>	<b>Meters</b>
<b>Young's Modulus</b>	<b>15300</b>	<b>MPa</b>
<b>Poisson's ratio</b>	<b>0.24</b>	<b>-</b>
<b>Wellbore Pressure (<math>P_w</math>)</b>	<b>30</b>	<b>MPa</b>
<b>Vertical In-situ Stress (<math>\sigma_V</math>)</b>	<b>-50</b>	<b>MPa</b>
<b>Minor Horizontal Stress (<math>\sigma_h</math>)</b>	<b>-40</b>	<b>MPa</b>
<b>Major Horizontal Stress (<math>\sigma_H</math>)</b>	<b>-60</b>	<b>MPa</b>
<b>b (x,y)</b>	<b>0</b>	<b>Body forces neglected</b>

Tabela 2: Dados de entrada das simulações

Os valores das propriedades mecânicas da rocha ( $E$  e  $\nu$ ) foram obtidos das Tabelas 8 e 9 (ver apêndice) para um arenito (sandstone).

A configuração das tensões horizontais e pressão interna do poço, podem ser observadas na Figura

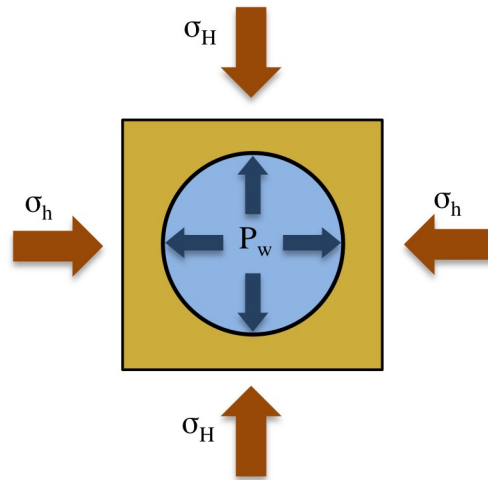


Figura 35: Representação das tensões horizontais e pressão interna do poço no plano bi-dimensional - Adaptado de [34]

Não foi encontrado na literatura um estudo para avaliar o melhor raio externo de malha para simulação (raio entre o centro do poço e contorno externo da malha). Observa-se pelas simulações contudo que as tensões restabelecem seu estado inicial em até 10 vezes o valor do raio interno do poço. Para as simulações a seguir, utilizou-se para raio externo da malha o valor de 20 vezes o raio interno do poço. Essa margem utilizada tem como objetivo evitar efeito de condições de contorno no cálculo de elementos finitos. O erro da solução conforme o raio externo da malha será apresentado mais adiante no capítulo 12.

O raio interno do poço foi selecionado para uma fase final de um típico projeto de poços profundos, conforme apresentado por Rocha e Azevedo (2007), e esquematizado na Figura 36 . Os valores entre parênteses indicam o diâmetro do poço, enquanto os valores sem parênteses são referentes ao diâmetro dos revestimentos. O poço com  $8 \frac{1}{2}$  polegadas de diâmetro apresenta raio de 0.10795 metros, para facilitar a visualização nas análises gráficas utilizou-se nas simulações raio interno de 0.10 metros.

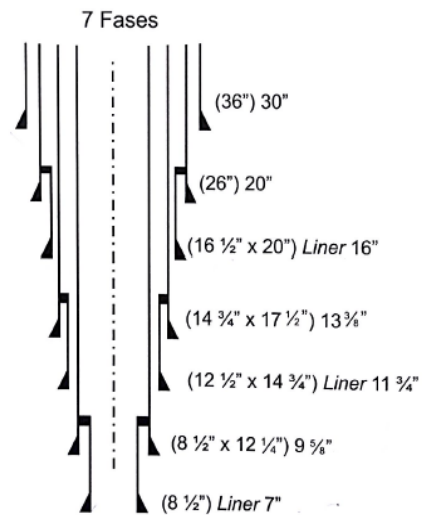


Figura 36: Exemplo de projeto típico utilizado em poços profundos - Adaptado de [34]

Os Exemplos 1 e 2 foram executados com aproximação quadrática (ordem polinomial 2), com 30 elementos circunferenciais e 25 elementos radiais.

Uma análise da aproximação da solução numérica com a solução analítica de acordo com número de elementos e ordem de aproximação será apresentada posteriormente.

## 11.1 Exemplo 1 - Poço com inclinação de 30 graus e direção de 60 graus

As Figuras 37 a 47 apresentam o estado de tensão para um poço com inclinação de 30 graus e direção de 60 graus, cujas configurações estão apresentadas na Tabela 2.

### 11.1.1 Visualização perpendicular ao eixo do poço

As Figuras 37, 38, 39, 40 apresentam a solução das tensões com visualização perpendicular ao eixo do poço. A Figura 41 apresenta a magnitude do deslocamento desse exemplo.

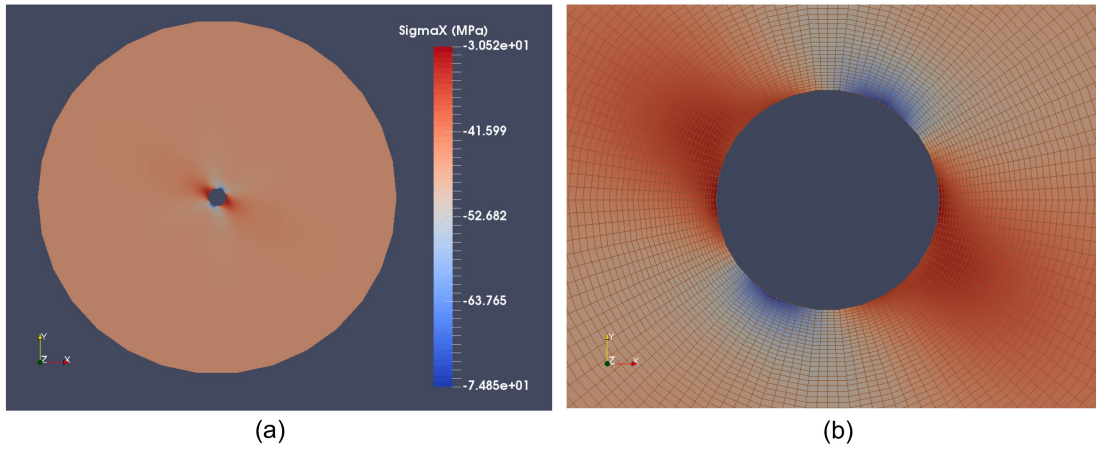


Figura 37: Solução de  $\sigma_x$  - (a) Visualização de toda a malha e (b) Visualização próxima ao poço

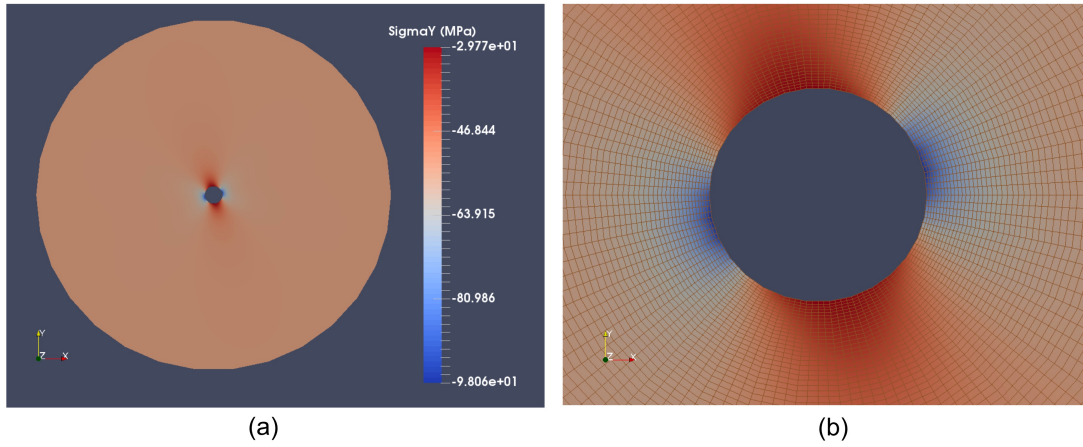


Figura 38: Solução de  $\sigma_y$  - (a) Visualização de toda a malha e (b) Visualização próxima ao poço

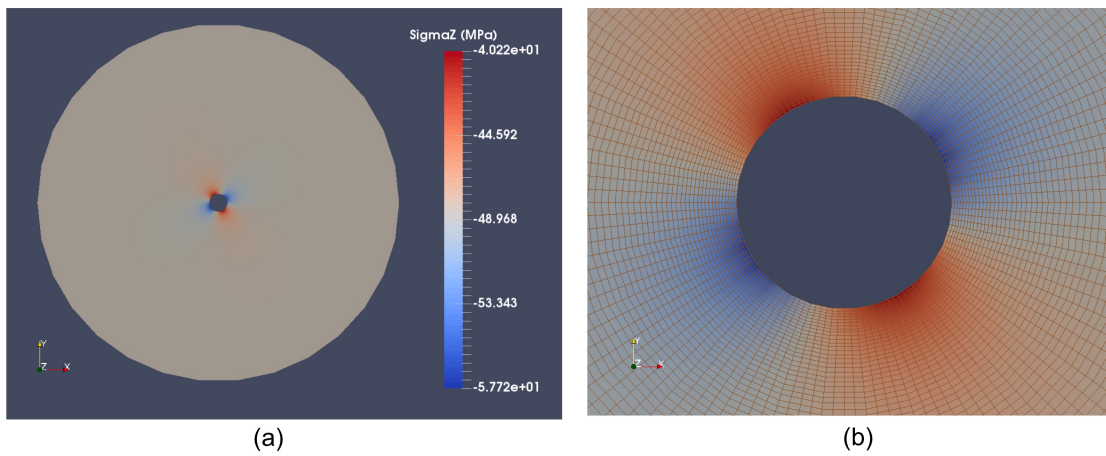


Figura 39: Solução de  $\sigma_z$  - (a) Visualização de toda a malha e (b) Visualização próxima ao poço

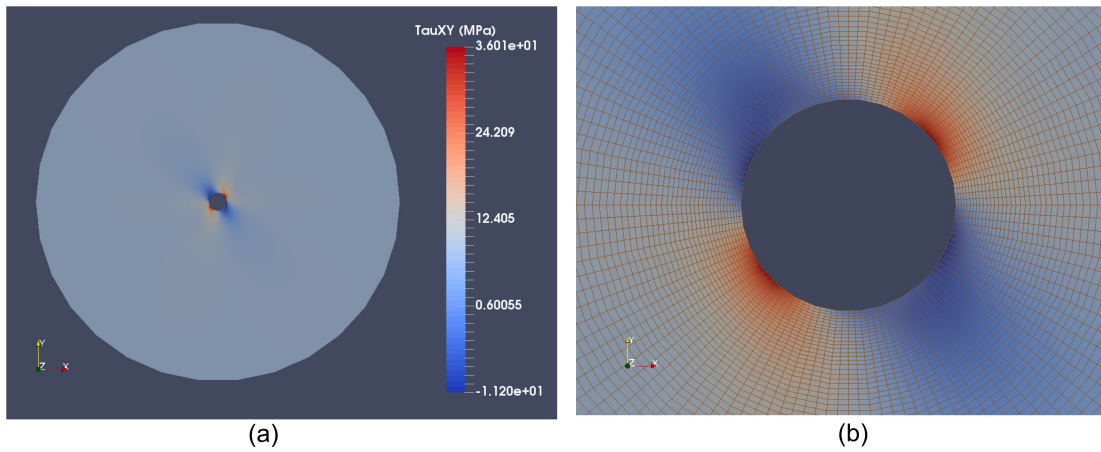


Figura 40: Solução de  $\tau_{xy}$  - (a) Visualização de toda a malha e (b) Visualização próxima ao poço

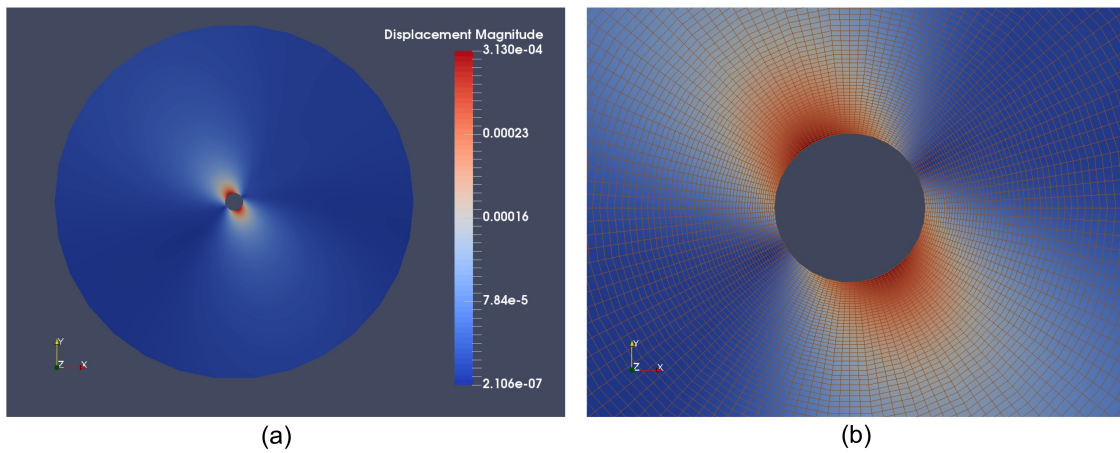


Figura 41: Magnitude do deslocamento  $\mathbf{u}$  - (a) Visualização de toda a malha e (b) Visualização próxima ao poço

O gráfico da Figura 43 apresenta a comparação entre o estado de tensão da solução aproximada e a da solução analítica. O gráfico foi plotado a partir de uma linha sobre a malha, conforme destacado na Figura 42, iniciando-se a partir do centro do poço até a extremidade externa da malha. A linha foi selecionada na região onde observou-se maiores variações de tensão.

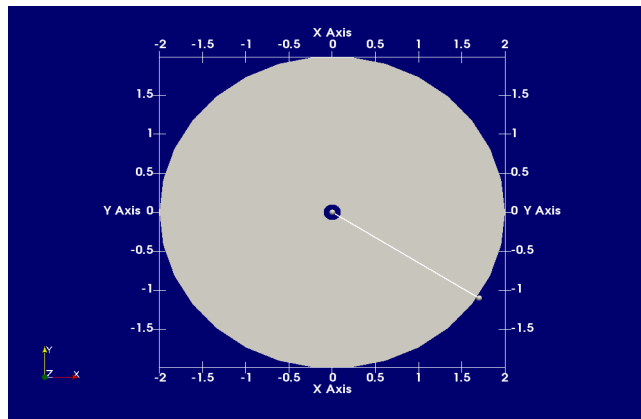


Figura 42: Linha de plotagem do gráfico sobre a malha

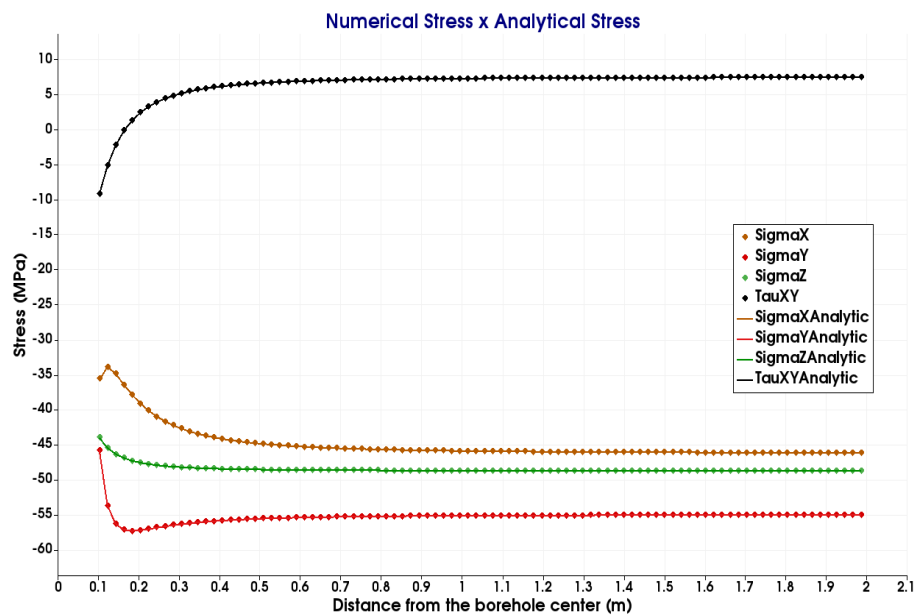


Figura 43: Solução Aproximada (MEF) x Solução Analítica para a malha perpendicular ao eixo poço

Na Figura 43, a linha contínua representa a solução analítica e os pontos representam a solução numérica. Observa-se boa aproximação entre as soluções. Nota-se que as maiores variações das tensões ocorrem próximo à parede do poço. Para os valores de tensões confinantes estabelecidos nas simulações conforme Tabela 2 e inclinação e direção descritos, tem-se as tensões iniciais descritas na Tabela 3 locais ao eixo do poço inclinado. Esses dados podem ser observados no *farfield* do gráfico da Figura 43, demonstrando que as tensões restabelecem seu estado inicial conforme se afastam do poço.



$\sigma_x^0$	-46.25	MPa
$\sigma_y^0$	-55.00	MPa
$\sigma_z^0$	-48.75	MPa
$\tau_{xy}^0$	7.50	MPa

Tabela 3: Tensões iniciais locais ao eixo do poço inclinado do Exemplo 1

### 11.1.2 Visualização projetada no plano horizontal

As Figuras 44, 45, 46 e 47 se referem ao estado de tensão ao redor do poço do Exemplo 1, projetada no plano horizontal ao eixo do poço.

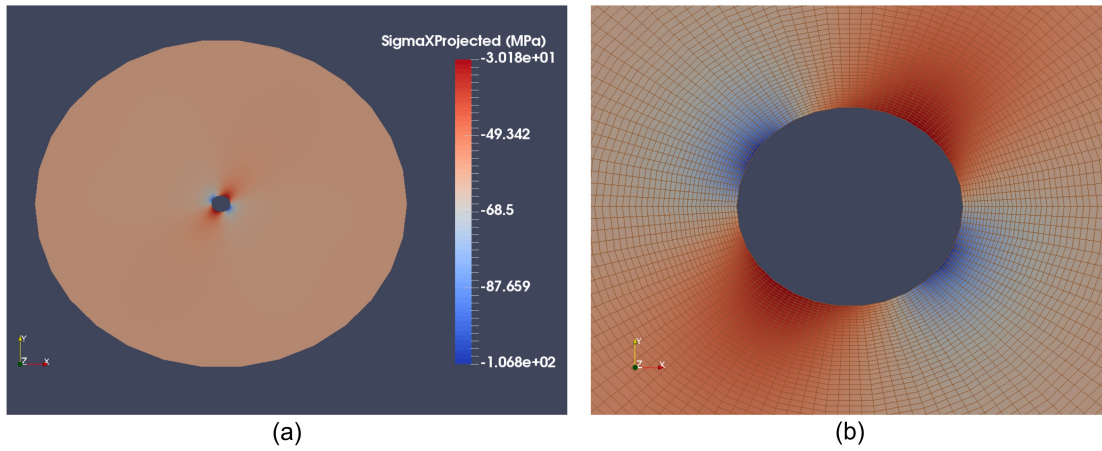


Figura 44:  $\sigma_x$  projetado - (a) Visualização de toda a malha e (b) Visualização próxima ao poço

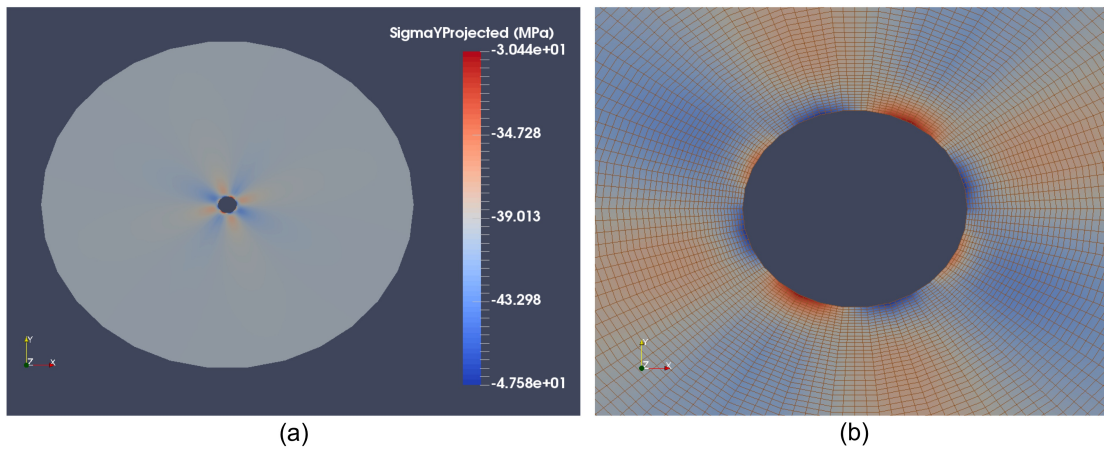


Figura 45:  $\sigma_y$  projetado - (a) Visualização de toda a malha e (b) Visualização próxima ao poço



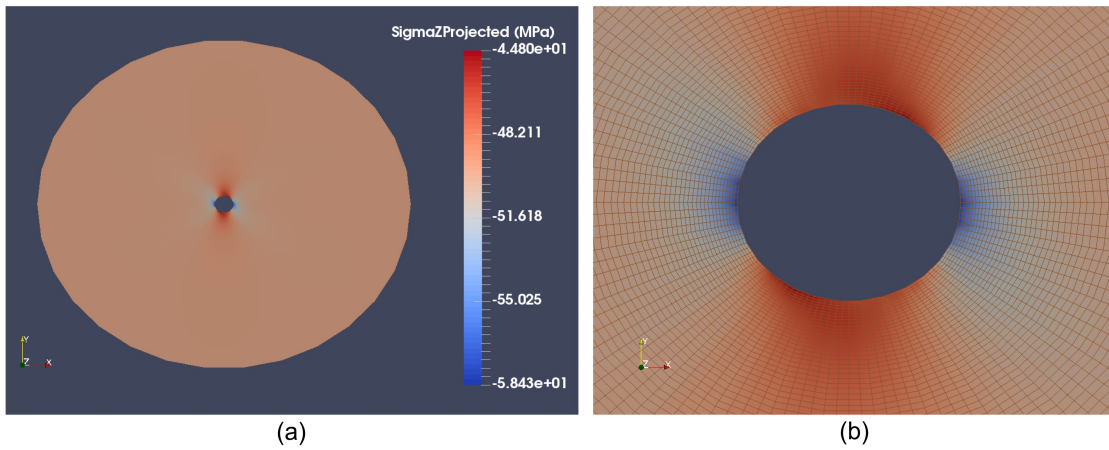


Figura 46:  $\sigma_z$  projetado - (a) Visualização de toda a malha e (b) Visualização próxima ao poço

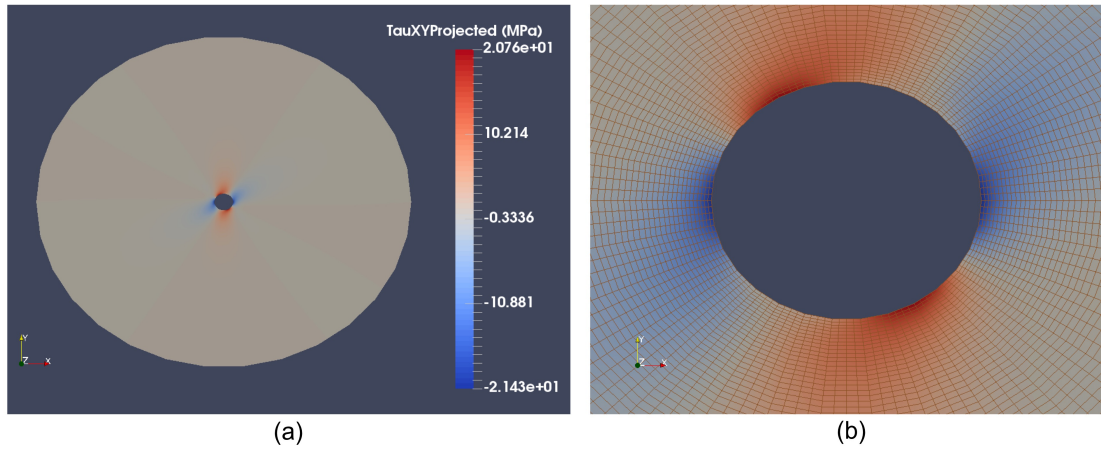


Figura 47:  $\tau_{xy}$  projetado - (a) Visualização de toda a malha e (b) Visualização próxima ao poço

Segue na Figura 49 a comparação entre a solução aproximada e a solução analítica. Do mesmo modo que o anterior, o gráfico foi obtido a partir de uma linha sobre a malha, conforme destacado na Figura 48.

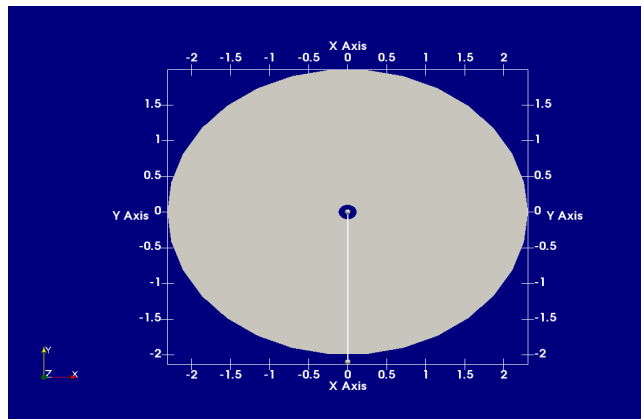


Figura 48: Linha de plotagem do gráfico sobre a malha projetada

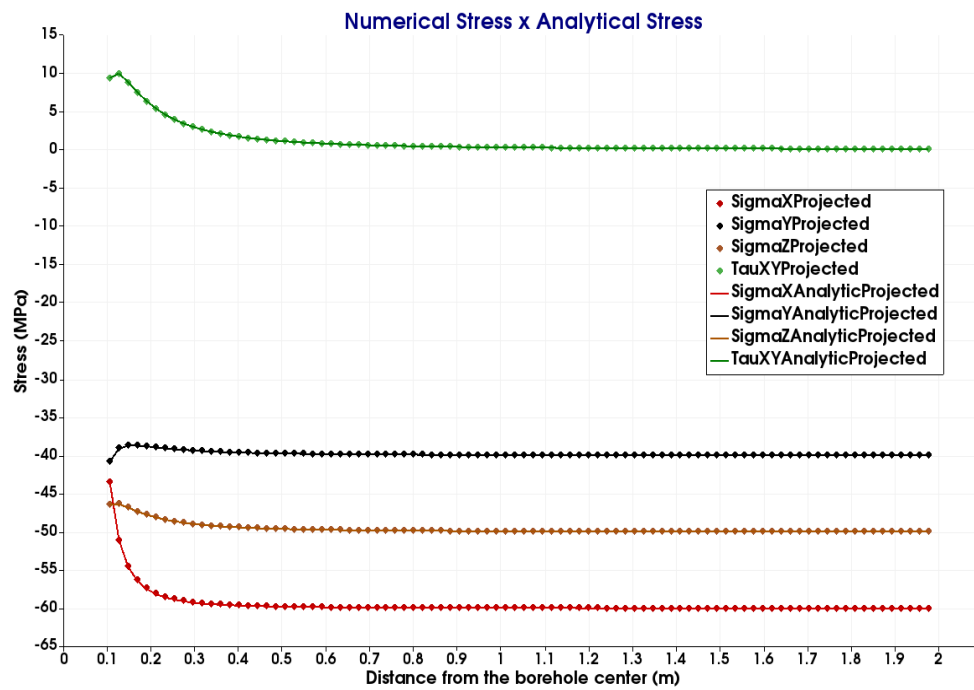


Figura 49: Solução Aproximada (MEF) x Solução Analítica para a malha **projetada** no plano horizontal

Observa-se no caso projetado, que as tensões no farfield reestabelecem seu estado de tensão confinante inicial sem alteração na direção e inclinação do poço, conforme dados da Tabela 2.

## 11.2 Exemplo 2 - Visualização do plano inclinado e projetado - Poço com inclinação de 50 graus e direção de 30 graus

O Exemplo a seguir apresenta os mesmos parâmetros do Exemplo 1, com exceção do ângulo de inclinação, o qual foi elevado para 50 graus e do ângulo de direção alterado para 30 graus. Diferentes maneiras de visualização são apresentadas a seguir.

### 11.2.1 Visualização da malha inclinada

A Figura 50, apresenta a visualização da malha inclinada com suas respectivas soluções para  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$  e  $\tau_{xy}$  em diferentes ângulos de visualização.

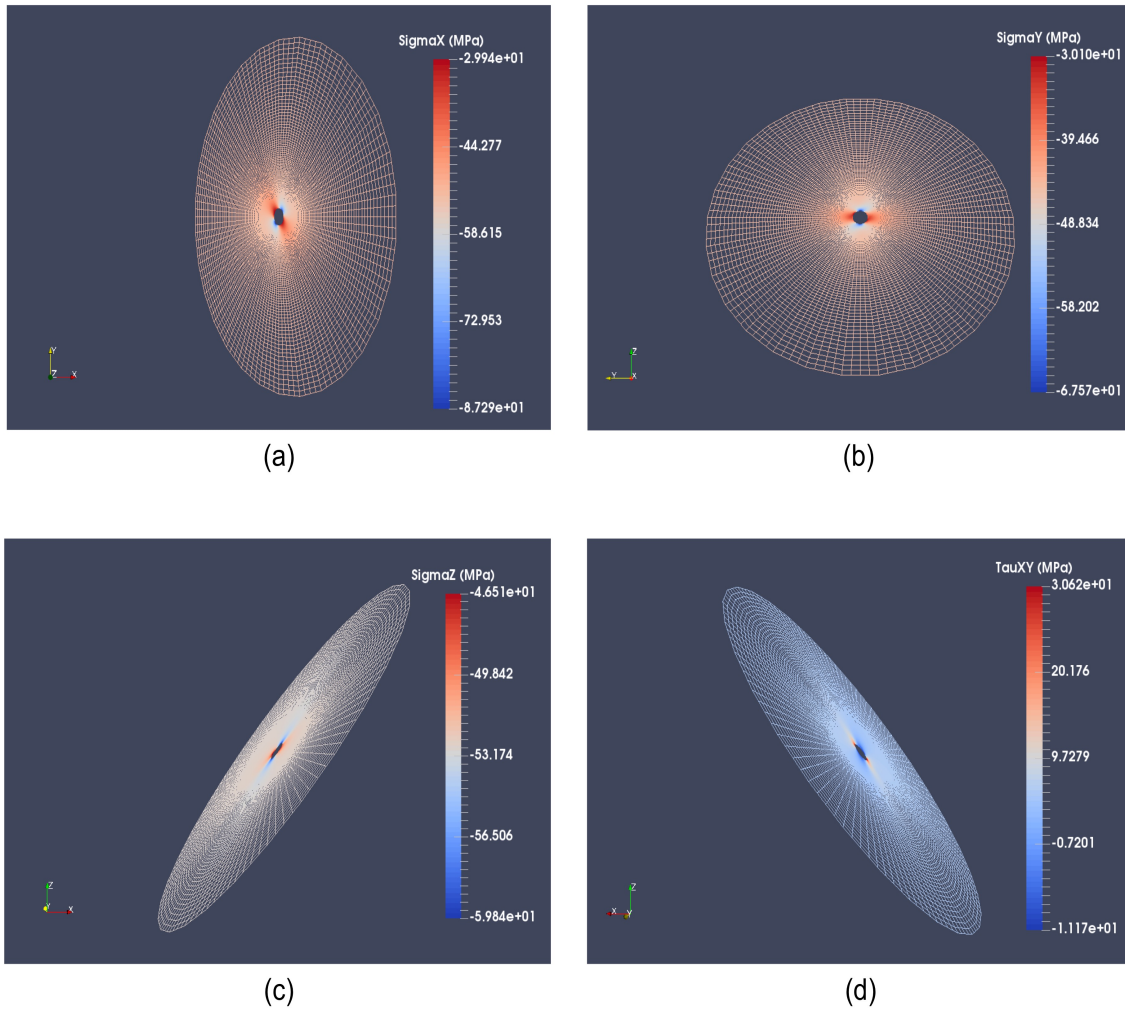


Figura 50: Visualização das malhas inclinadas das soluções (a)  $\sigma_x$ , (b)  $\sigma_y$ , (c)  $\sigma_z$  e (d)  $\tau_{xy}$  em diferentes pontos de vista.

### 11.2.2 Visualização da malha inclinada e projetada

A Figura 51 apresenta a visualização inclinada e projetada do poço com suas respectivas soluções. É possível observar os dois planos sobrepostos bem como a solução do estado de tensões em cada plano. As soluções gráficas aqui representadas permitem ao Engenheiro de Projeto de Poços, bem como ao Geólogo, convenientes análises da resposta elástica da formação no plano inclinado e na camada horizontal simultaneamente.

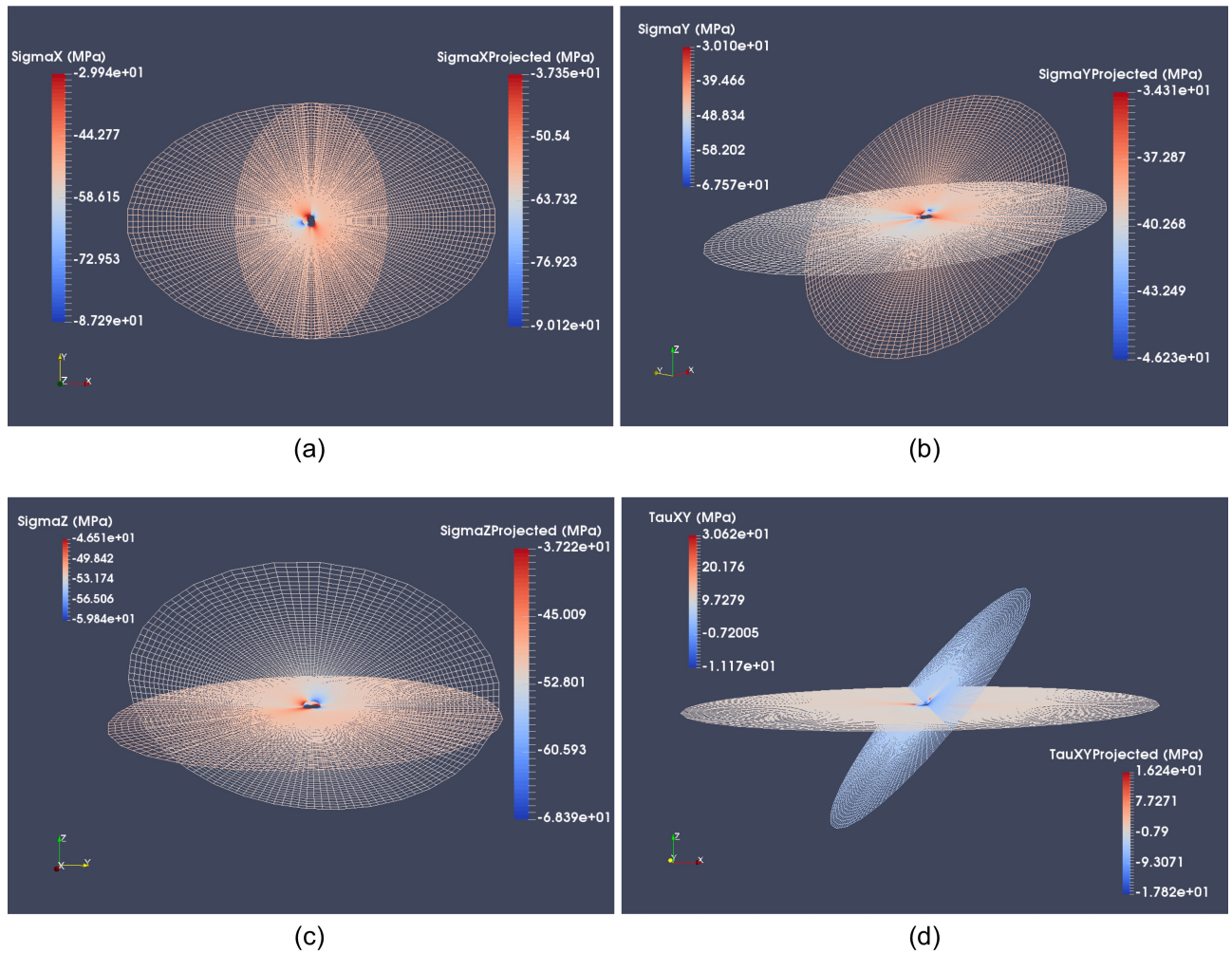


Figura 51: Visualização das malhas inclinadas e projetadas das soluções (a)  $\sigma_x$ , (b)  $\sigma_y$ , (c)  $\sigma_z$  e (d)  $\tau_{xy}$  em diferentes pontos de vista.

## 12 Verificação do Código

Este capítulo tem como objetivo apresentar verificações do código implementado. Será possível observar como o simulador se comporta quando utiliza-se a solução exata (solução analítica disponível na literatura) como função das tensões iniciais e função na condição de contorno. Uma análise da aproximação da solução conforme ordem de aproximação também será demonstrada. Um estudo do erro entre a solução aproximada e exata foi realizado alterando número de elementos, geometria dos elementos e raio externo da malha. A taxa de convergência do código implementado também será apresentada.

### 12.1 Solução analítica como função de $\sigma_0$ e condições de contorno

De modo a verificar a solução aproximada implementada, simulou-se o cenário conforme Exemplo 2: com direção de 30 graus e inclinação de 50 graus - definindo-se a solução analítica como função de tensões iniciais ao longo do domínio e função da condição de contorno. Uma vez que, nesse caso, não há perturbação no sistema, ou seja, não existem variações, espera-se que a solução do cálculo de elementos finitos para o deslocamento seja significativamente próxima de zero.

A Figura 52 apresenta a magnitude do deslocamento nesse caso, observa-se que a magnitude em toda a malha varia na ordem de  $10^{-10}$  e  $10^{-14}$ . Plotando-se os valores dos deslocamentos sobre uma linha da malha para esse caso, utilizando a solução analítica como função da condição de contorno e função das tensões iniciais, e comparando com a solução sem utilizá-la, tem-se as curvas apresentadas na Figura 53.

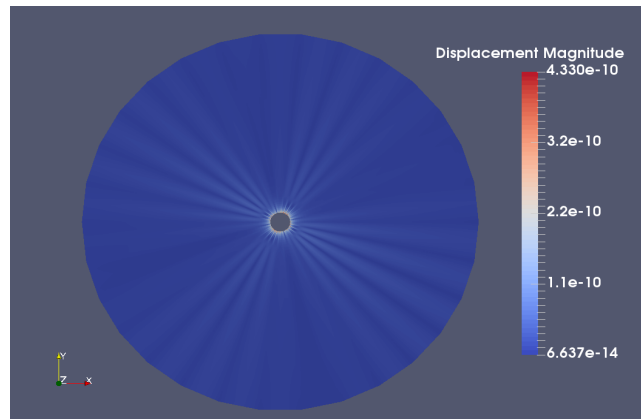


Figura 52: Magnitude do deslocamento

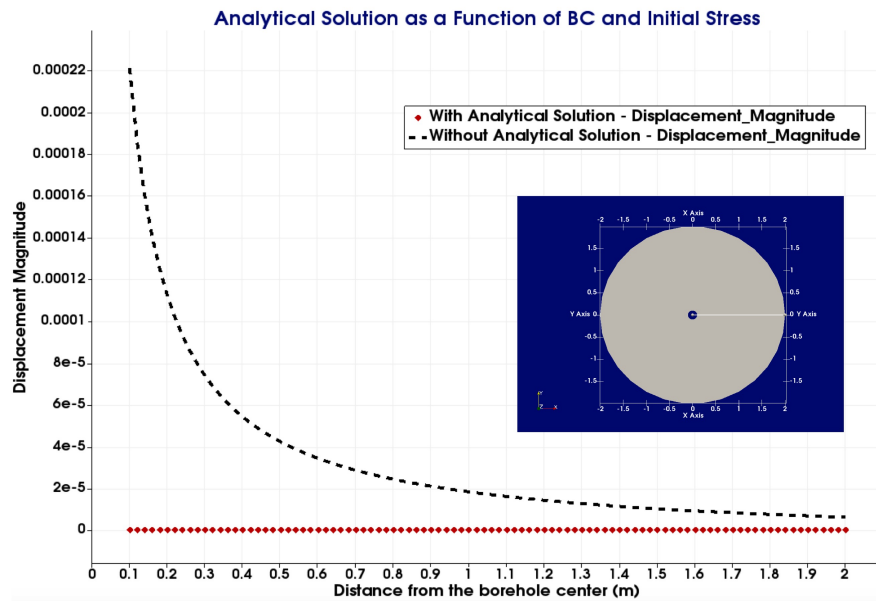


Figura 53: Plot magnitude do deslocamento sobre a malha

Pode-se observar que a magnitude do deslocamento encontra-se muito próxima a zero quando as equações analíticas são utilizadas, conforme era esperado.

## 12.2 Aproximação da solução conforme ordem polinomial de aproximação

Admitindo-se os parâmetros do Exemplo 2, foi realizada uma comparação das soluções com simulação utilizando ordem polinomial de aproximação 1 e 2 (aproximação linear e quadrática). A área plotada segue destacada na Figura 54. A comparação das soluções podem ser observadas nas Figuras 55 e 56, com raio variando do centro do poço (0 metros) a 0.8 metros. A linha contínua se refere à solução analítica, os pontos circulares dizem respeito à solução com ordem 1 e as cruces se referem à solução com ordem 2.

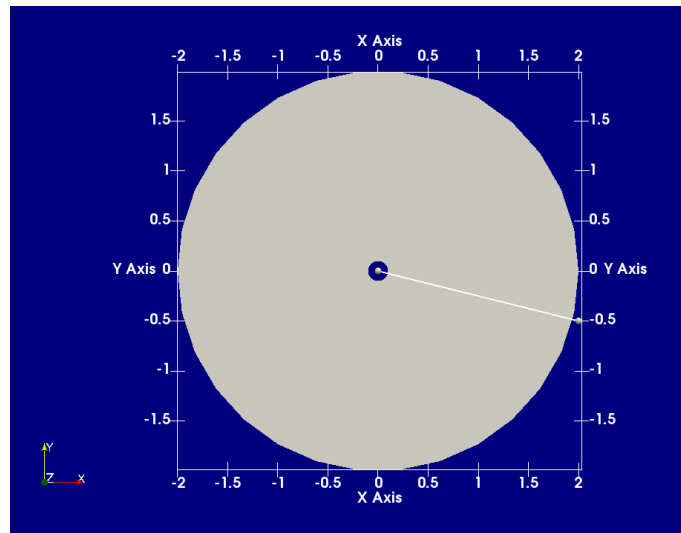


Figura 54: Área plotada

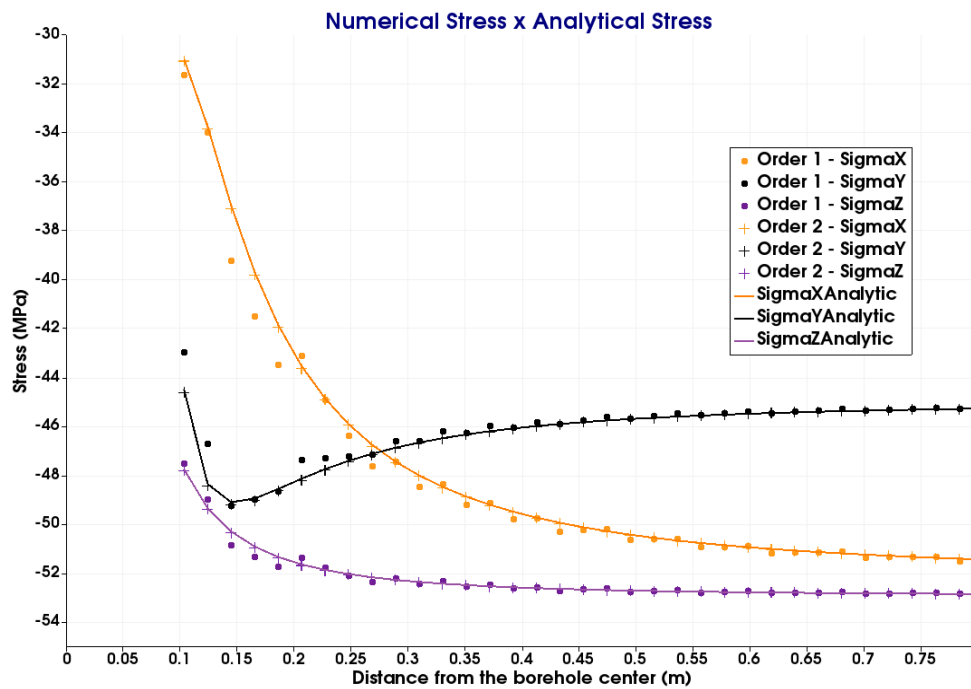


Figura 55: Tensões  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  Aproximada x Analítica- Ordem 1 e 2

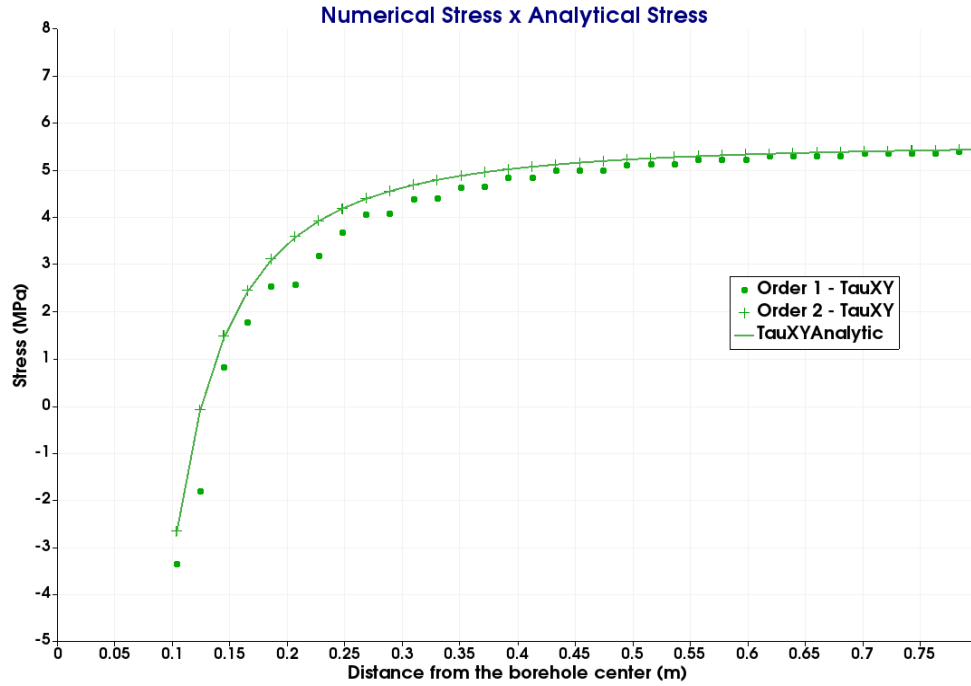


Figura 56: Tensão  $\tau_{xy}$  Aproximada x Analítica- Ordem 1 e 2

Nota-se claramente a discrepância entre a solução numérica e a solução analítica para ordem 1 (aproximação linear). Contudo, a solução numérica se aproxima consideravelmente da solução exata quando simulado com ordem de aproximação igual a 2 (aproximação quadrática).

### 12.3 Erro

Realizou-se um estudo do erro entre a solução numérica e a solução exata. O objetivo deste estudo é apresentar como o erro entre as soluções se comporta com o aumento do número de elementos e da ordem polinomial de aproximação. Variou-se tanto o número de elementos radiais ( $el_{rad}$ ) e circunferenciais ( $el_{circ}$ ), bem como as ordens de aproximação ( $p$ ) em 1 e 2. Observou-se também se o erro entre as soluções varia conforme a determinação do comprimento radial do primeiro elemento ( $sz_{el}$ ), definido pelo usuário através do termo  $\left(\frac{L}{L_{circ}}\right)$  da Equação 145, uma vez que esse parâmetro tem influência na progressão geométrica ( $q$ ) dos elementos da malha.

Os dados utilizados para calcular os erros correspondem aos valores do Exemplo 1, para um poço com 60 graus de direção e 30 graus de inclinação.

A Figura 57 ilustra a geometria dos elementos da malha próximos à parede do poço com  $\left(\frac{L}{L_{circ}}\right) =$



0.5; 1.0 e 2.0. As imagens foram obtidas por uma malha com número de elementos circunferenciais  $el_{circ} = 16$  e elementos radiais  $el_{rad} = 10$ . Observa-se que para  $\left(\frac{L}{L_{circ}}\right) = 0.5$ , têm-se elementos mais retangulares e maior número de elementos radiais concentrados próximo à parede do poço. Para  $\left(\frac{L}{L_{circ}}\right) = 1.0$ , obtêm-se elementos de geometria mais quadrada mas um número menor de elementos radiais próximo ao poço. Para  $\left(\frac{L}{L_{circ}}\right) = 2.0$ , obtêm-se elementos de geometria mais retangulares, porém maiores e com menor concentração de elementos radiais próximo à parede do poço.

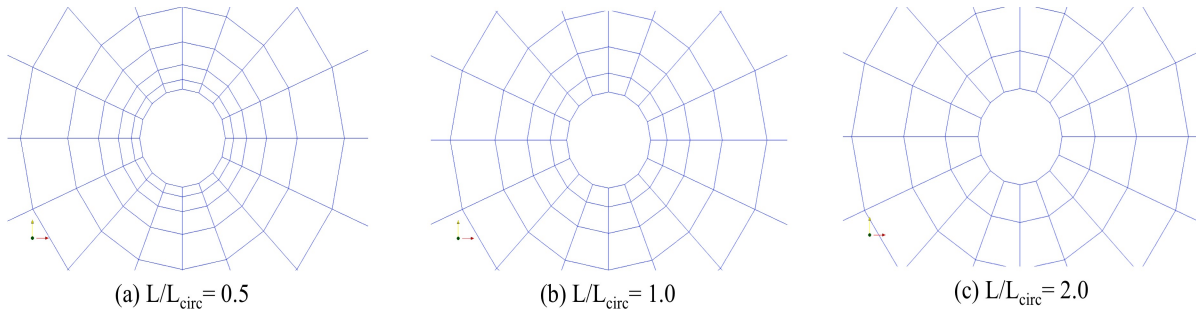


Figura 57: (a) Malha com  $\left(\frac{L}{L_{circ}}\right) = 0.5$ , (b)  $\left(\frac{L}{L_{circ}}\right) = 1.0$ , (c)  $\left(\frac{L}{L_{circ}}\right) = 2.0$

### 12.3.1 Caso 1 - Incremento do número de elementos radiais ( $el_{rad}$ )

Nesse primeiro caso, fixou-se o número de elementos circunferenciais em  $el_{circ} = 16$  e variou-se o número de elementos radiais ( $el_{rad}$ ) em 10, 20, 30 e 40 elementos. Essas variações foram analisadas para raio externo da malha de 2 e 4 metros, e  $\left(\frac{L}{L_{circ}}\right) = 0.5; 1.0$  e 1.5.

A Figura 58, apresenta a norma da energia dos erros em relação ao número de elementos radiais, de acordo com  $\left(\frac{L}{L_{circ}}\right)$  e ordem de aproximação, para 2 metros de raio externo da malha.

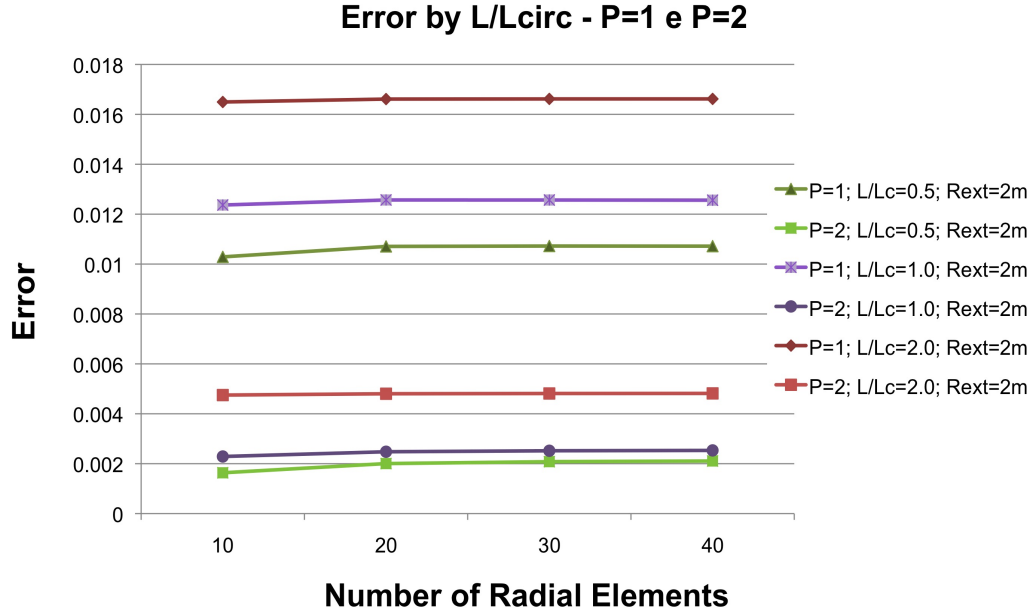


Figura 58: Erro x Número de elementos radiais - Ordens 1 e 2,  $\left(\frac{L}{L_{circ}}\right) = 0.5; 1.0 \text{ e } 1.5$  ; 2 metros de raio externo

Observa-se que o incremento no número de elementos radiais varia significativamente o erro entre as soluções tanto para ordem 1 quanto para ordem 2 nesse caso simulado. Contudo, a razão do elemento  $\left(\frac{L}{L_{circ}}\right)$  influencia na magnitude do erro, onde o menor valor de 0.5 apresenta os menores erros tanto para ordem 1 quanto para ordem 2, seguidamente por  $\left(\frac{L}{L_{circ}}\right) = 1.0$  e maior erro com  $\left(\frac{L}{L_{circ}}\right) = 2.0$ .

As Figuras 59 e 60, apresentam a norma da energia dos erros em relação ao raio externo da malha. Na Figura 59 observa-se os erros com 2 e 4 metros de raio externo para ordem  $p=1$ . A Figura 60 apresenta os erros com 2 e 4 metros de raio externo para ordem  $p=2$ .

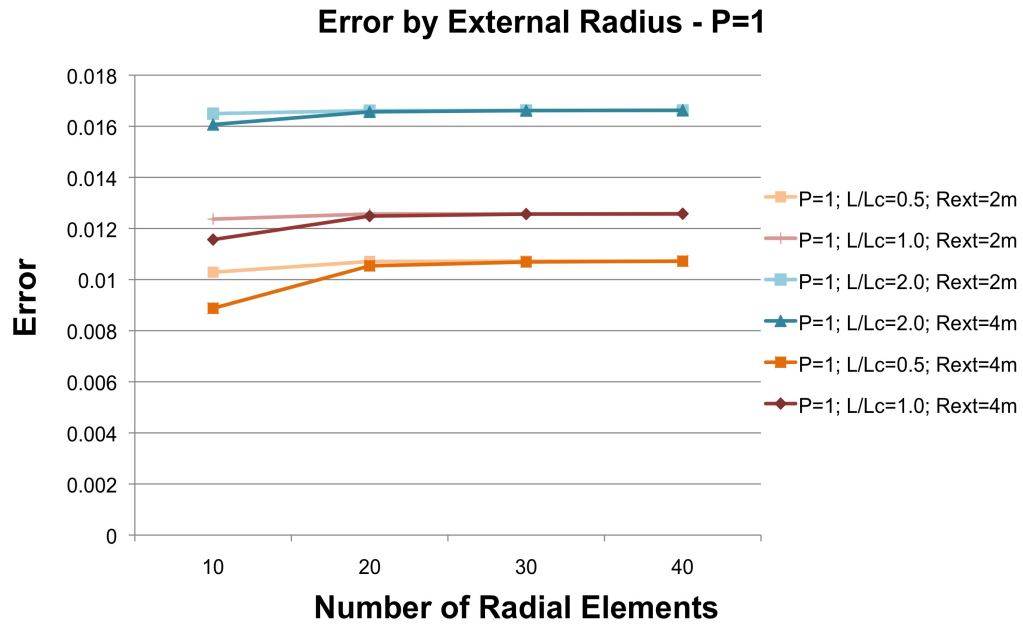


Figura 59: Erro x Número de elementos radiais - Ordem 1,  $\left(\frac{L}{L_{circ}}\right) = 0.5; 1.0 \text{ e } 1.5$  ; 2 e 4 metros de raio externo

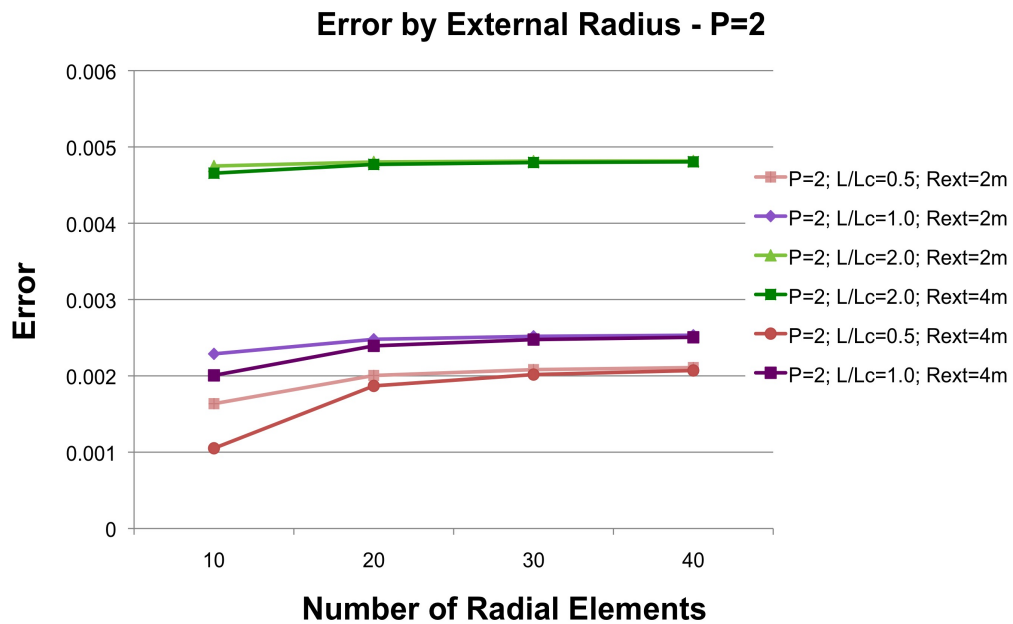


Figura 60: Erro x Número de elementos radiais - Ordem 2,  $\left(\frac{L}{L_{circ}}\right) = 0.5; 1.0 \text{ e } 1.5$  ; 2 e 4 metros de raio externo

Nota-se que o aumento do raio externo da malha juntamente com o incremento no número de elementos radiais, não apresenta significativas mudanças no erro entre as soluções tanto para ordem 1 quanto para ordem 2.

### 12.3.2 Caso 2 - Incremento do número de elementos circunferenciais ( $el_{circ}$ )

Da mesma maneira, nesse segundo caso fixou-se o número de elementos radiais  $el_{rad} = 16$  e variou-se o número de elementos circunferenciais ( $el_{circ}$ ) em 10, 20, 30 e 40 elementos. Essas variações foram também analisadas para raio externo da malha de 2 e 4 metros, e  $\left(\frac{L}{L_{circ}}\right) = 0.5$ ; 1.0 e 2.0.

A Figura 61, apresenta a norma da energia dos erros em relação ao número de elementos circunferenciais, de acordo com  $\left(\frac{L}{L_{circ}}\right)$  e ordem de aproximação, para 2 metros de raio externo da malha.

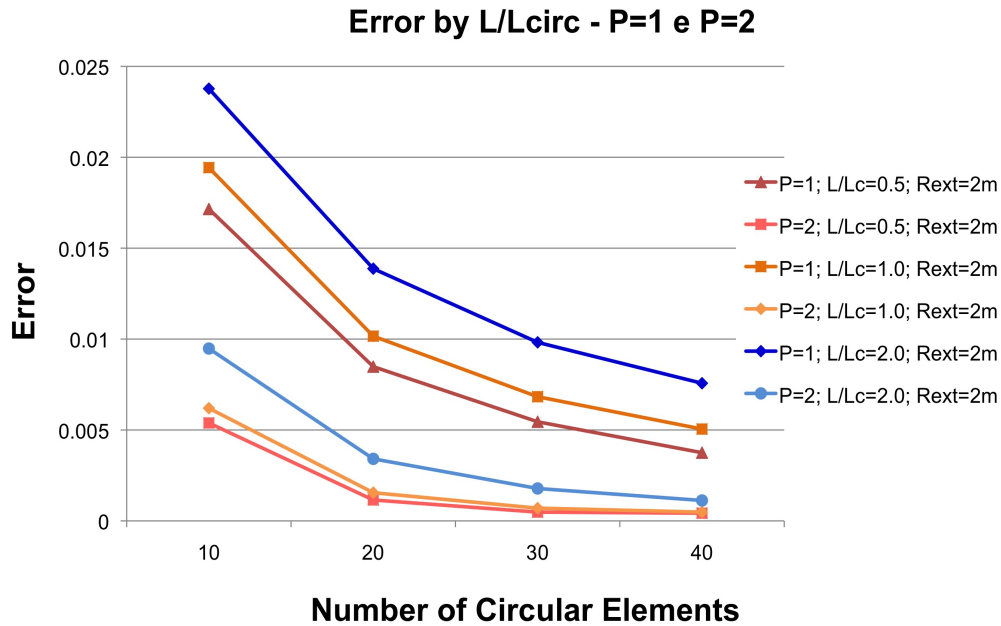


Figura 61: Erro x Número de elementos circunferenciais - Ordens 1 e 2,  $\left(\frac{L}{L_{circ}}\right) = 0.5$ ; 1.0 e 1.5 ; 2 metros de raio externo

Diferentemente dos casos anteriores, observou-se que o incremento no número de elementos circunferenciais reduz o erro entre as soluções aproximada e exata, tanto para ordem 1 quanto para

ordem 2. A razão do elemento  $\left(\frac{L}{L_{circ}}\right)$  também influencia a magnitude do erro nesse caso, onde o valor de 0.5 apresenta os menores erros tanto para ordem 1 quanto para ordem 2.

A norma da energia dos erros em relação ao raio externo da malha estão representadas nas Figuras 62 e 63. Observa-se os erros para malhas com 2 e 4 metros de raio externo para ordem  $p=1$  na Figura 62. A Figura 63 apresenta os erros com 2 e 4 metros de raio externo para ordem  $p=2$ .

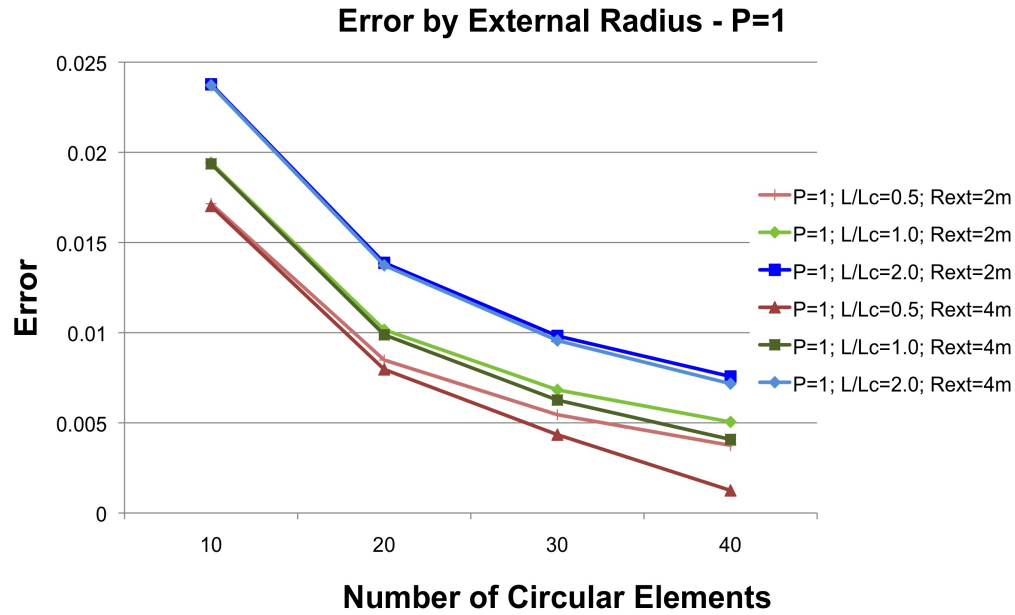


Figura 62: Erro x Número de elementos circunferenciais - Ordem 1,  $\left(\frac{L}{L_{circ}}\right) = 0.5; 1.0$  e  $1.5$ ; 2 e 4 metros de raio externo

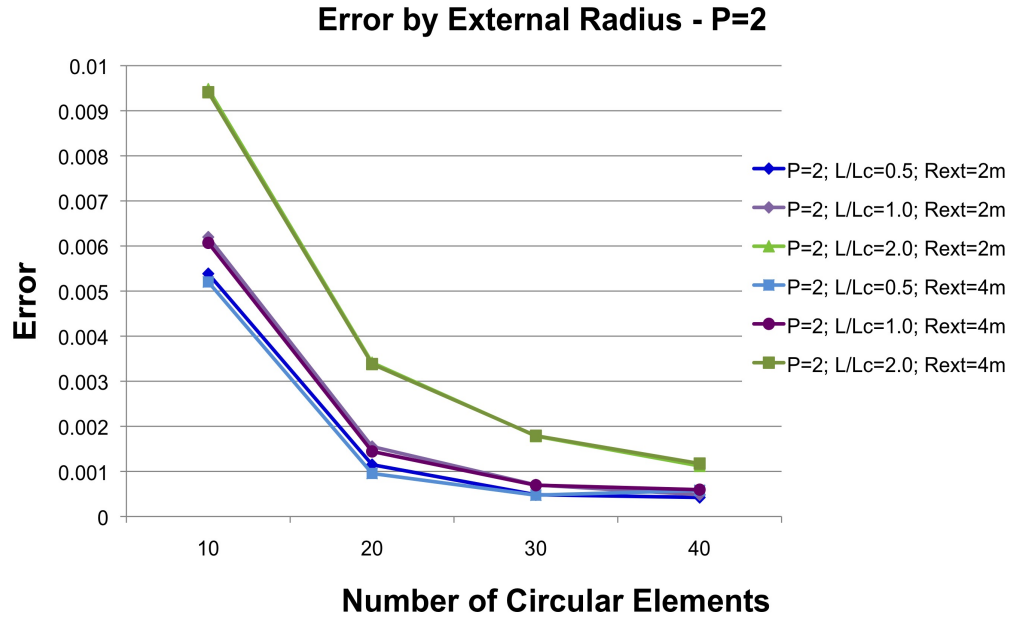


Figura 63: Erro x Número de elementos circunferenciais - Ordem 2,  $\left(\frac{L}{L_{circ}}\right) = 0.5; 1.0 \text{ e } 1.5$  ; 2 e 4 metros de raio externo

Assim como no caso 1, nota-se que o aumento do raio externo da malha juntamente com o incremento no número de elementos circunferenciais, não apresenta significativas mudanças no erro entre as soluções para ordem 2, mas pouca variação para ordem 1. Observa-se que o erro tende a convergir em 30 e 40 elementos para ordem 2 e  $\left(\frac{L}{L_{circ}}\right) = 0.5$  e 1.0.

Diferentemente do caso anterior, observou-se que o incremento no número de elementos circunferenciais reduz o erro da solução aproximada de maneira significativa.

Observou-se que para todos os casos a ordem de aproximação  $p=2$  e a proporção  $\left(\frac{L}{L_{circ}}\right) = 0.5$  apresentam o menor erro de aproximação. No incremento do número de elementos radiais não há redução significativa do erro da solução aproximada. Por outro lado, o acréscimo no número de elementos circunferenciais apresenta redução substancial do erro de aproximação. O comprimento do raio externo apresentou influência apenas para o caso em que se aumenta o número de elementos circunferenciais com ordem 1, nos outros casos o comprimento do raio externo não demonstrou grandes variações.

## 12.4 Taxa de convergência

A Figura 64 apresenta a taxa de convergência da norma de energia dos erros de acordo com o refinamento  $h$  para um poço com os parâmetros do Exemplo 1. A Tabela 4 apresenta os dados e as taxas de convergência obtidos.

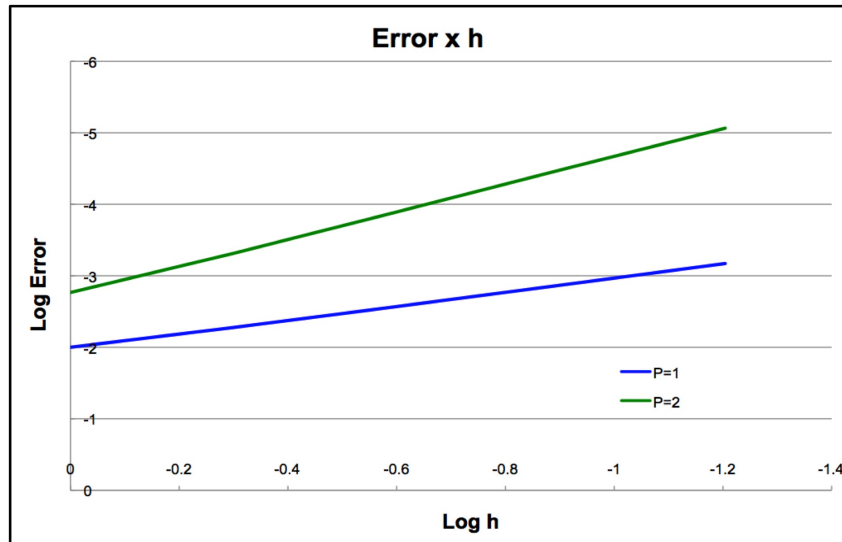


Figura 64: Gráfico log-log do erro em função de  $h$

P = 1				
h	Error	Log(Error)	Log(h)	Rates
1	0.00999451	-2.000238493	0	0.921581899
1/2	0.0052764	-2.277662288	-0.301029996	0.976018793
1/4	0.00268242	-2.571473221	-0.602059991	0.993464017
1/8	0.0013473	-2.87053569	-0.903089987	0.99828559
1/16	0.000674451	-3.171049597	-1.204119983	-

P = 2				
h	Error	Log(Error)	Log(h)	Rates
1	0.00171361	-2.766088012	0	1.826683869
1/2	0.000483087	-3.315974649	-0.301029996	1.928625067
1/4	0.000126897	-3.896548645	-0.602059991	1.951309763
1/8	3.28E-05	-4.483951414	-0.903089987	1.929027077
1/16	8.62E-06	-5.064646427	-1.204119983	-

Tabela 4: Taxas de convergência da aproximação para ordem 1 e 2

Observa-se taxas de convergência ótimas para o código implementado.

### 13 Visualização do critério de escoamento

A partir de um critério selecionado, foi possível caracterizar a área de escoamento plástico da formação ao redor do poço inclinado. O critério de Sandler-Dimaggio, assumido neste estudo, foi escolhido por representar bem o comportamento constitutivo de rochas, [8]. A função de escoamento plástico ( $\Phi$ ) de Sandler-Dimaggio é composta por duas funções, conforme detalhado na seção 5. Nesta análise contudo, considerou-se apenas a função de superfície envoltória de cisalhamento, ou seja, será desconsiderada a envoltória que limita a deformação elástica sob confinamento (*cap*). Desse modo,  $\Phi = F_1$ .

As simulações apresentadas a seguir, possuem como base o trabalho publicado por Cecílio (2014), onde o autor desenvolveu uma modelagem elastoplástica aplicada à simulação numérica da estabilidade de poços de petróleo. Em seu estudo, o autor considera os modelos elastoplásticos de Mohr-Coulomb e de Sandler-Dimaggio para análise de plastificação de uma rocha carbonática. As simulações apresentadas pelo autor correspondem à poços verticais, ou seja, sem alteração na direção e inclinação do poço. O objetivo das simulações a seguir é verificar como a formação se comporta conforme a inclinação e direção do poço, representando graficamente a região plastificada da mesma.

Primeiramente, será realizada uma comparação entre a solução do modelo elastoplástico apresentado pelo autor [8] e pelo modelo linear elástico desenvolvido neste trabalho, para poços verticais. Serão apresentados dois casos, os quais se diferenciam pela pressão interna do poço, uma menor e outra maior.

Os casos de comparação assumem o mesmo critério de direção dos eixos do autor. Os parâmetros do critério de Sandler-Dimaggio utilizados nas simulações seguem na Tabela 5, conforme apresentado por Cecílio (2014), para um material carbonático.

<b>A</b>	<b>152.52</b>	<b>MPa</b>
<b>B</b>	<b>0.0015489</b>	<b>Mpa<sup>-1</sup></b>
<b>C</b>	<b>146.29</b>	<b>MPa</b>

Tabela 5: Parâmetros materiais do critério de Sandler-Dimaggio para um material carbonático, obtido de Cecílio [8]



### 13.1 Caso 1

As Figuras 65, 66 e 67 apresentam a comparação entre o primeiro invariante do tensor de tensão ( $I_1$ ), o segundo invariante do tensor de tensão deviatório ( $J_2$ ), e da função de escoamento plástico do modelo elastoplástico e do modelo linear elástico. Os dados utilizados na simulação encontram-se na Tabela 6.

<b>Wellbore Radius</b>	<b>0.10795</b>	<b>Meters</b>
<b>External Radius</b>	<b>3.0</b>	<b>Meters</b>
<b>Young's Modulus</b>	<b>29269</b>	<b>MPa</b>
<b>Poisson's ratio</b>	<b>0.203</b>	<b>-</b>
<b>Wellbore Pressure (<math>P_w</math>)</b>	<b>28.9</b>	<b>MPa</b>
<b>Vertical In-situ Stress (<math>\sigma_v</math>)</b>	<b>-48.2</b>	<b>MPa</b>
<b>Minor Horizontal Stress (<math>\sigma_h</math>)</b>	<b>-45.9</b>	<b>MPa</b>
<b>Major Horizontal Stress (<math>\sigma_H</math>)</b>	<b>-62.1</b>	<b>MPa</b>
<b>b (x,y)</b>	<b>0</b>	<b>Body forces neglected</b>

Tabela 6: Parâmetros do modelo elastoplástico de Sandler-Dimaggio para um material carbonático, obtido de Cecílio [8]

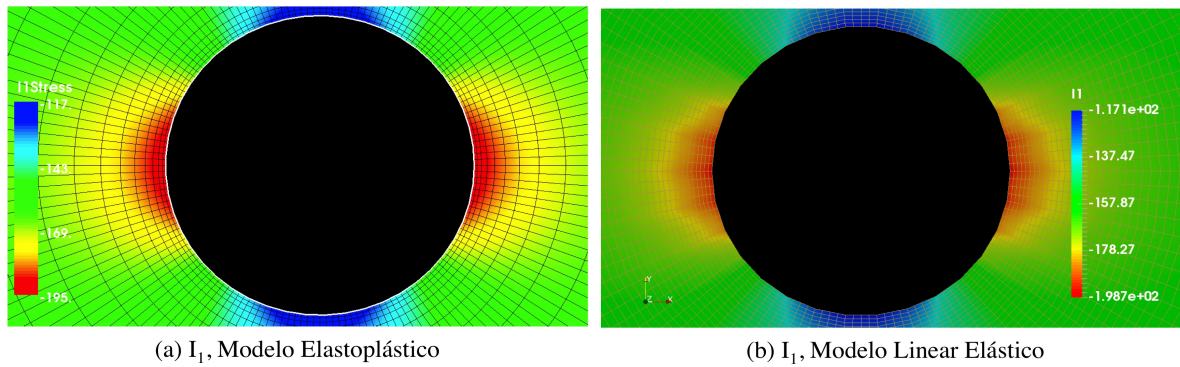


Figura 65:  $I_1$ - (a) Modelo Elastoplástico, obtido de [8] (b) Modelo Linear Elástico

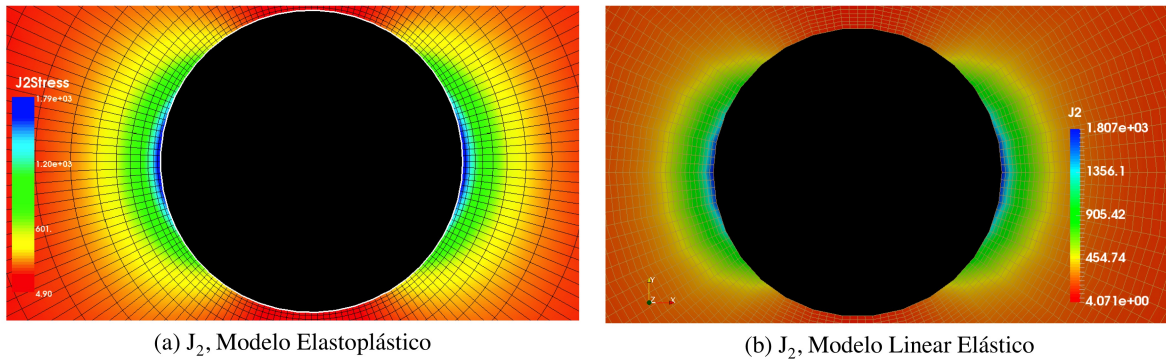


Figura 66:  $J_2$ - (a) Modelo Elastoplástico, obtido de [8] (b) Modelo Linear Elástico

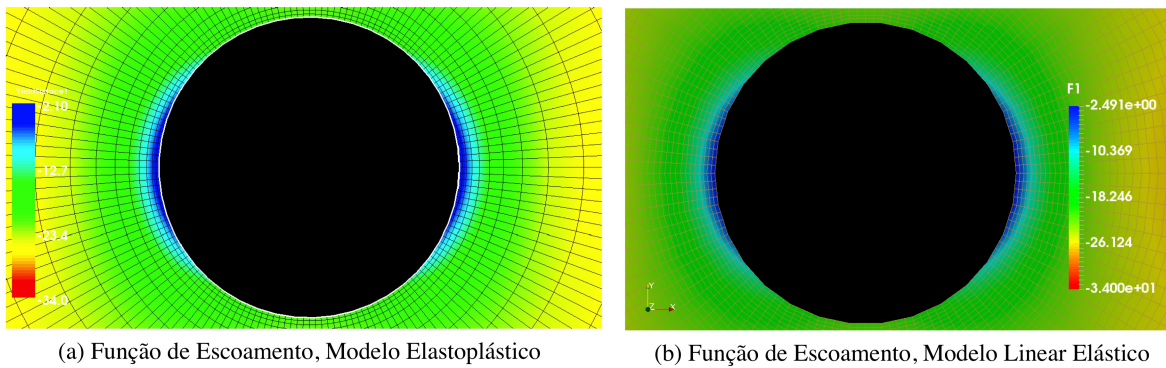


Figura 67: Função de Escoamento Plástico - (a) Modelo Elastoplástico, obtido de [8] (b) Modelo Linear Elástico

Nota-se que as soluções conferem em  $J_2$ ,  $I_1$ , e pela função de escoamento. Este primeiro caso não apresenta região plastificada, onde pode-se observar que  $\Phi \leq 0$ .

## 13.2 Caso 2

Do mesmo modo, este segundo caso apresenta a comparação entre  $J_2$ ,  $I_1$ , e função de escoamento dos dois modelos. Nesse momento o poço possui pressão interna menor, conforme Tabela 7.

<b>Wellbore Radius</b>	<b>0.10795</b>	<b>Meters</b>
<b>External Radius</b>	<b>3.0</b>	<b>Meters</b>
<b>Young's Modulus</b>	<b>29269</b>	<b>MPa</b>
<b>Poisson's ratio</b>	<b>0.203</b>	<b>-</b>
<b>Wellbore Pressure (<math>P_w</math>)</b>	<b>19.5</b>	<b>MPa</b>
<b>Vertical In-situ Stress (<math>\sigma_v</math>)</b>	<b>-48.2</b>	<b>MPa</b>
<b>Minor Horizontal Stress (<math>\sigma_h</math>)</b>	<b>-45.9</b>	<b>MPa</b>
<b>Major Horizontal Stress (<math>\sigma_H</math>)</b>	<b>-62.1</b>	<b>MPa</b>
<b>b (x,y)</b>	<b>0</b>	<b>Body forces neglected</b>

Tabela 7: Parâmetros do modelo elastoplástico de Sandler-Dimaggio para um material carbonático, obtido de Cecílio [8]

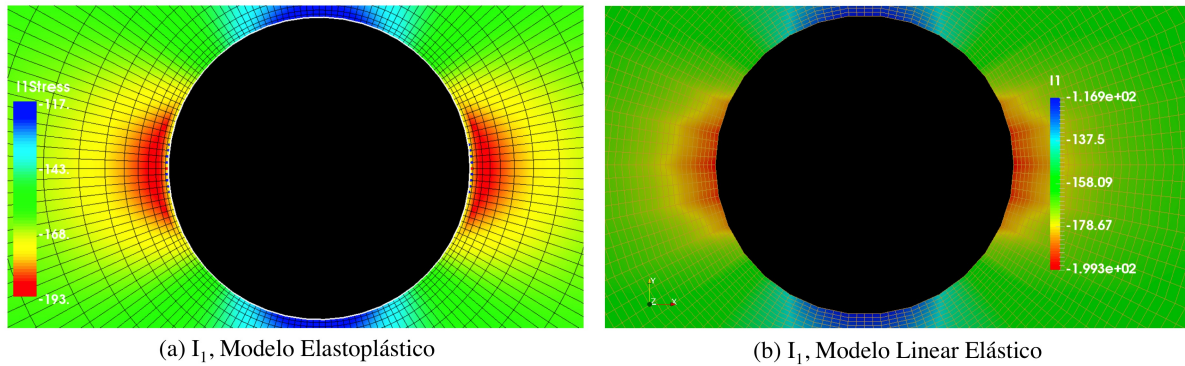


Figura 68:  $I_1$ - (a) Modelo Elastoplástico, obtido de [8] (b) Modelo Linear Elástico

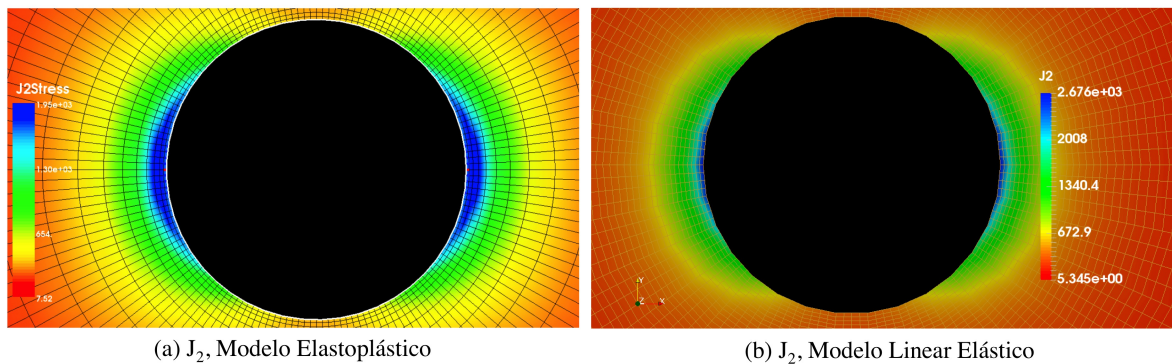


Figura 69:  $J_2$ - (a) Modelo Elastoplástico, obtido de [8] (b) Modelo Linear Elástico

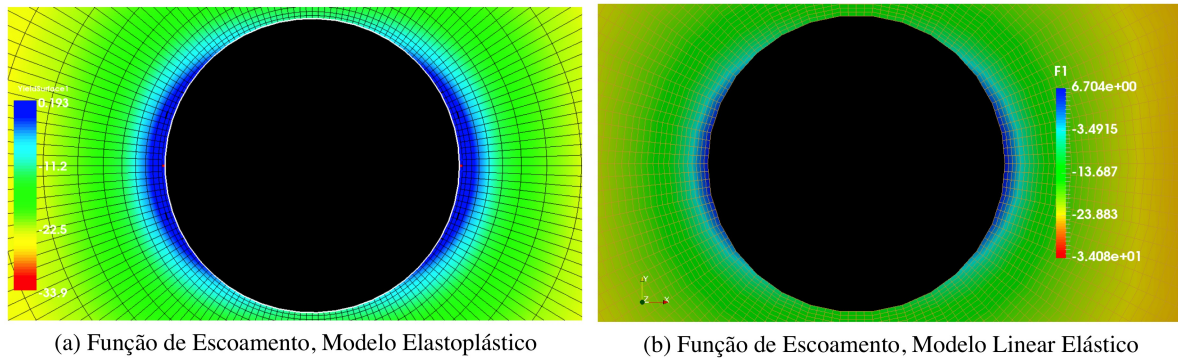


Figura 70: Função de Escoamento Plástico - (a) Modelo Elastoplástico, obtido de [8] (b) Modelo Linear Elástico

Observa-se que este caso apresenta área plastificada, onde  $\Phi \geq 0$  em algumas regiões ao redor do poço. Nota-se que as soluções conferem em  $I1$ , mas se diferem em  $J2$  e pela função de escoamento. Isso se deve pelo modelo implementado e pelo autor considerar também o *cap* de fechamento delimitando a deformação elástica. Porém, a região plastificada corresponde nas duas soluções.

Pode-se observar que para um poço vertical, perfurado em uma rocha carbonática, com os parâmetros materiais e tensões confinantes descritos acima, a pressão interna do poço de 28.9 MPa não falha a formação ao redor do poço, mantendo o poço estável e seguro. Entretanto, para este mesmo poço com pressão interna de 19.5 MPa, a formação irá falhar, de acordo com o critério, gerando instabilidades.

### 13.3 Caso 1 - Efeito da Inclinação

Neste momento, o **Caso 1** apresentado anteriormente será simulado variando o ângulo de inclinação do poço entre 15 e 60 graus. Este caso considera ângulo de direção/azimute de 0 graus. A Figura 71 apresenta a função de escoamento conforme a inclinação do poço.



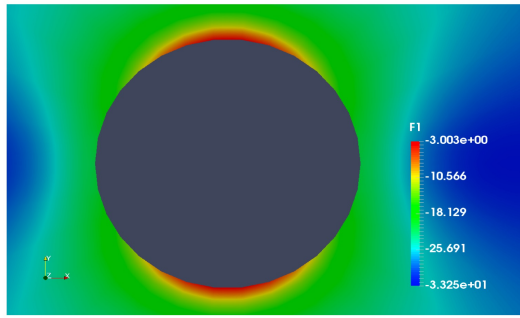
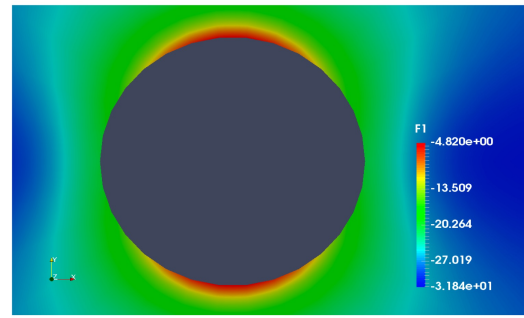
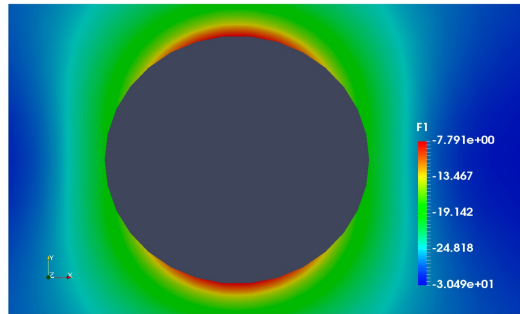
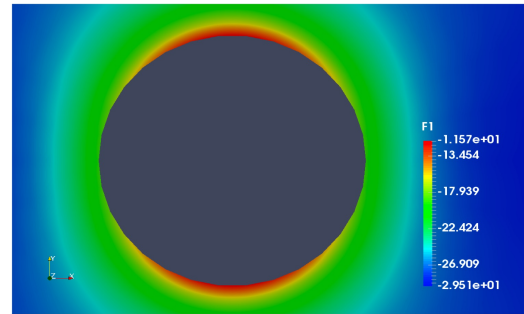
(a) Função de Escoamento, Inclinação do poço =  $15^\circ$ (b) Função de Escoamento, Inclinação do poço =  $30^\circ$ (c) Função de Escoamento, Inclinação do poço =  $45^\circ$ (d) Função de Escoamento, Inclinação do poço =  $60^\circ$ 

Figura 71: Função de Escoamento Plástico de acordo com o Modelo Linear Elástico para um Poço com Inclinação de 15, 30, 45 e 60 graus

O poço do **Caso 1** não apresentou área plastificada com aumento de inclinação do poço. Para o poço com as respectivas características, a pressão interna de 28.9 MPa mostrou manter poços verticais e inclinados estáveis.

### 13.4 Caso 2 - Efeito da Inclinação

Do mesmo modo, o caso a seguir assume os mesmos parâmetros do **Caso 2**, porém variando o ângulo de inclinação do poço entre 15 e 60 graus. Este caso também considera ângulo de direção de 0 graus. As Figuras 72, 73, 74 e 75 apresentam a função de escoamento para o **Caso 2** de acordo com o ângulo de inclinação. As imagens ilustram do lado esquerdo o valor da função de escoamento ao redor do poço e somente a área plastificada do lado direito.

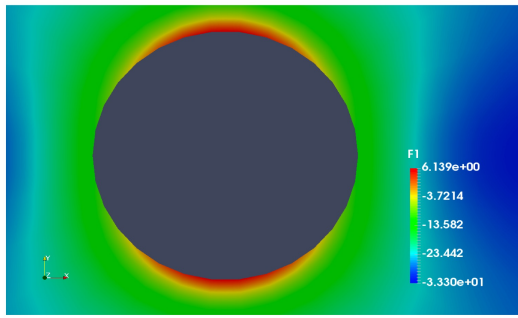
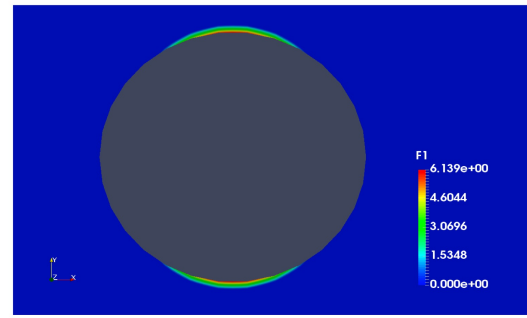
(a) Função de Escoamento, Inclinação do poço =  $15^\circ$ (b) Área Plastificada, Inclinação do poço =  $15^\circ$ 

Figura 72: Função de Escoamento Plástico de acordo com o Modelo Linear Elástico para um Poço com Inclinação de 15 graus

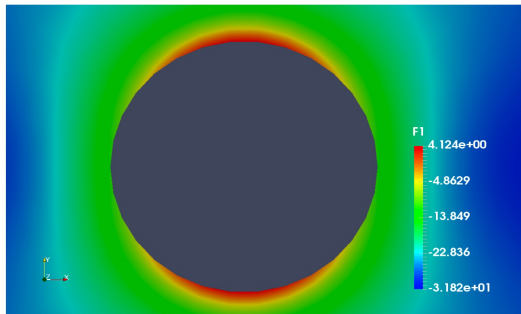
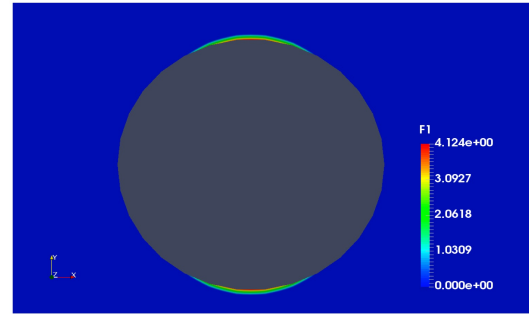
(a) Função de Escoamento, Inclinação do poço =  $30^\circ$ (b) Área Plastificada, Inclinação do poço =  $30^\circ$ 

Figura 73: Função de Escoamento Plástico de acordo com o Modelo Linear Elástico para um Poço com Inclinação de 30 graus

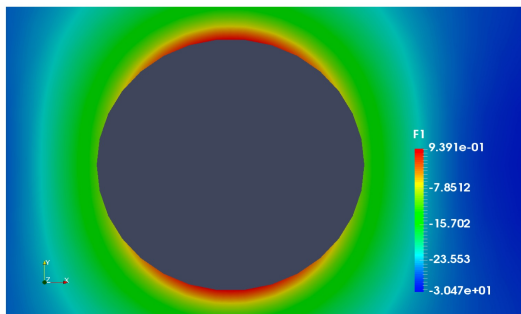
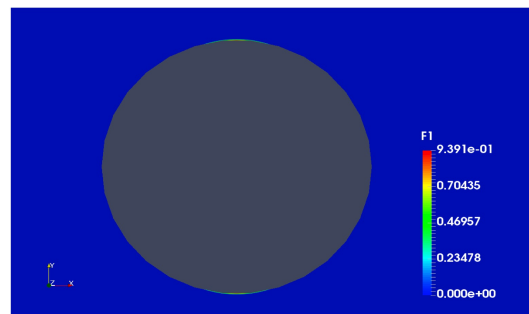
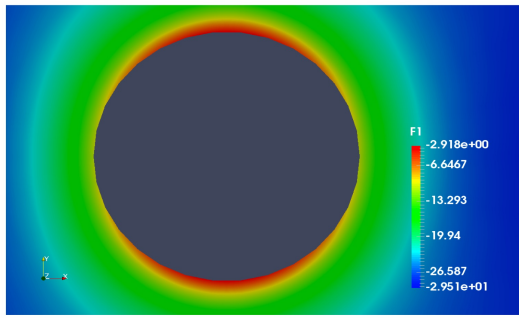
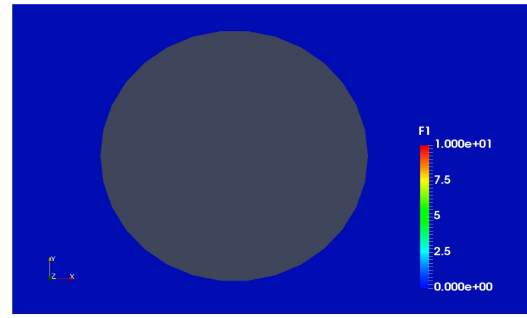
(a) Função de Escoamento, Inclinação do poço =  $45^\circ$ (b) Área Plastificada, Inclinação do poço =  $45^\circ$ 

Figura 74: Função de Escoamento Plástico de acordo com o Modelo Linear Elástico para um Poço com Inclinação de 45 graus



(a) Função de Escoamento, Inclinação do poço = 60°



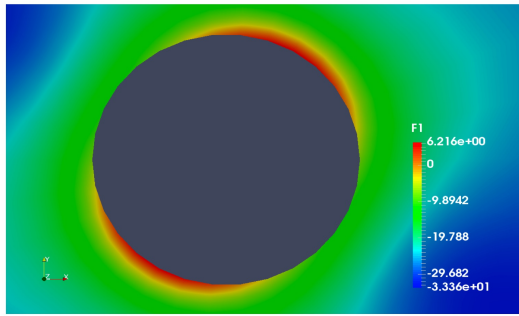
(b) Área Plastificada, Inclinação do poço = 60°

Figura 75: Função de Escoamento Plástico de acordo com o Modelo Linear Elástico para um Poço com Inclinação de 60 graus

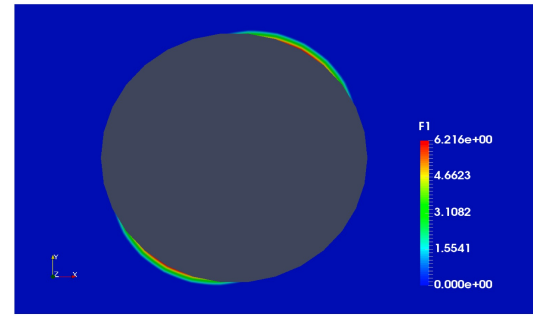
Nota-se que, apesar de plastificar assim como o poço vertical, a área plastificada é reduzida conforme o aumento da inclinação do poço. Em 15 graus de inclinação a área plastificada se assemelha a do poço vertical, reduzindo-se para um poço inclinado em 30 graus, tornando a reduzir significativamente em 45 graus e não apresentado mais área plastificada com 60 graus de inclinação.

### 13.5 Caso 2 - Efeito da Inclinação e Direção

Este caso se refere ao mesmo poço do **Caso 2**, porém assume neste momento não somente a variação de inclinação do poço, mas também uma direção/azimute fixa de 30 graus. O objetivo dessa simulação é verificar como a direção pode afetar o comportamento da formação conforme a inclinação. As Figuras 76, 77, 78 e 79 apresentam a função de escoamento plástico e somente a área plastificada.

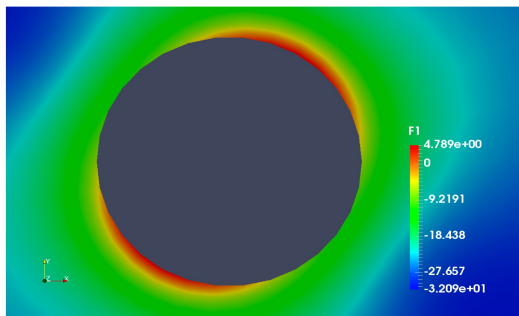


(a) Função de Escoamento, Inclinação = 15°, Direção = 30°

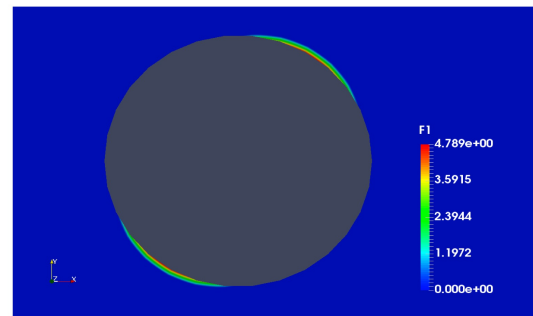


(b) Área Plastificada, Inclinação = 15°, Direção = 30°

Figura 76: Função de Escoamento Plástico de acordo com o Modelo Linear Elástico para um Poço com Inclinação de 15 graus e Direção de 30 graus

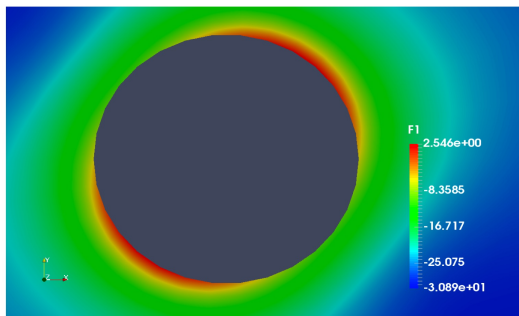


(a) Função de Escoamento, Inclinação = 30°, Direção = 30°

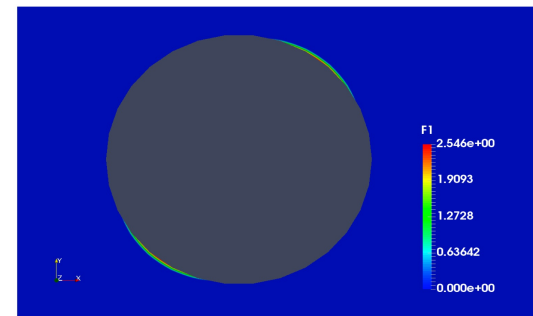


(b) Área Plastificada, Inclinação = 30°, Direção = 30°

Figura 77: Função de Escoamento Plástico de acordo com o Modelo Linear Elástico para um Poço com Inclinação de 30 graus e Direção de 30 graus



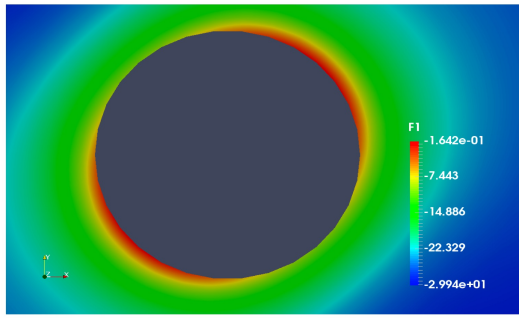
(a) Função de Escoamento, Inclinação = 45°, Direção = 30°



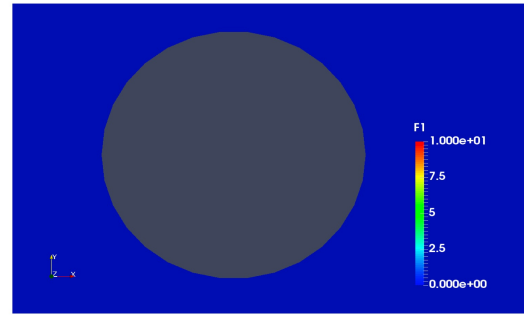
(b) Área Plastificada, Inclinação = 45°, Direção = 30°

Figura 78: Função de Escoamento Plástico de acordo com o Modelo Linear Elástico para um Poço com Inclinação de 45 graus e Direção de 30 graus





(a) Função de Escoamento, Inclinação = 60°, Direção = 30°



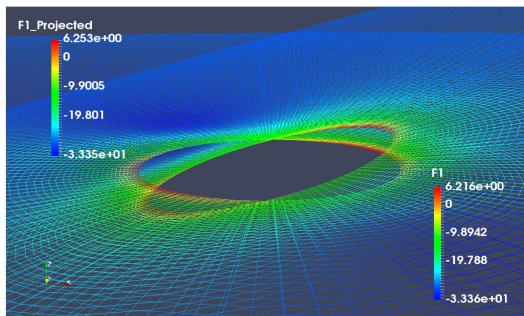
(b) Área Plastificada, Inclinação = 60°, Direção = 30°

Figura 79: Função de Escoamento Plástico de acordo com o Modelo Linear Elástico para um Poço com Inclinação de 60 graus e Direção de 30 graus

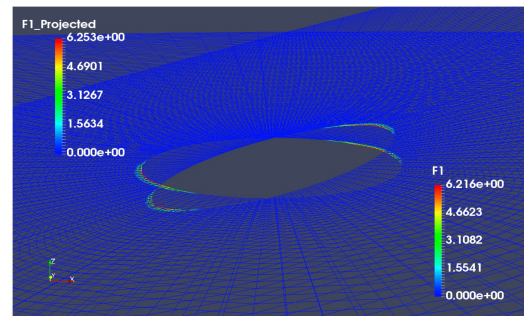
Observa-se que, com direção do poço de 30 graus, a região plastificada se assemelha com o caso anterior sem direção nos poços inclinados em 15 e 30 graus. Entretanto, a área plastificada em 45 graus com direção de 30 graus é significativamente maior se comparada o poço de mesma inclinação mas com direção igual a zero. Em ambos os casos não há escoamento plástico no poço com inclinação de 60 graus.

### 13.6 Caso 2 - Efeito da Inclinação e Direção Visualização Inclinada e Projetada.

As Figuras 80, 81, 82 e 83 apresentam o **Caso 2** com inclinação entre 15 e 60 graus e direção de 30 graus, com visualização inclinada e projetada.

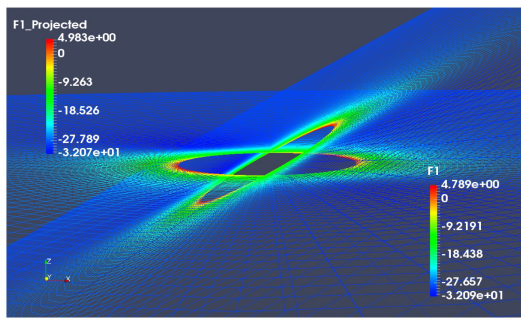


(a) Função de Escoamento, Inclinação = 15, Direção = 30°

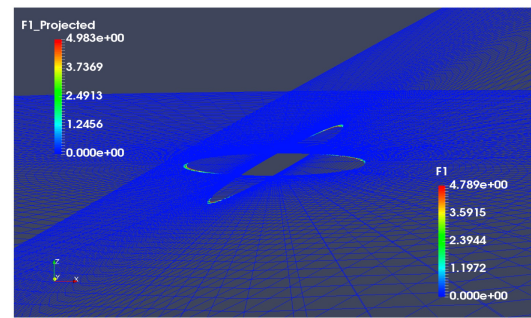


(b) Área Plastificada, Inclinação = 15°, Direção = 30°

Figura 80: Função de Escoamento Plástico de acordo com o Modelo Linear Elástico para um Poço com Inclinação de 15 graus e Direção de 30 graus - Visualização Inclinada e Projetada

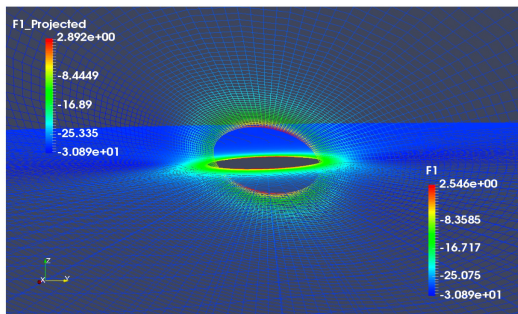


(a) Função de Escoamento, Inclinação = 30°, Direção = 30°

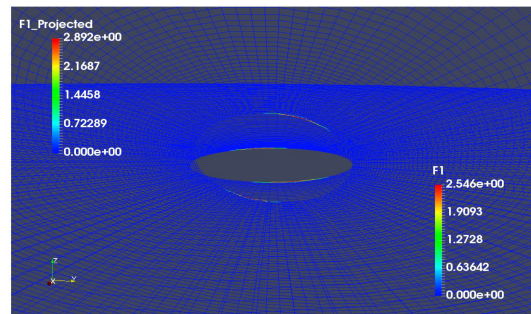


(b) Área Plastificada, Inclinação = 30°, Direção = 30°

Figura 81: Função de Escoamento Plástico de acordo com o Modelo Linear Elástico para um Poço com Inclinação de 30 graus e Direção de 30 graus - Visualização Inclinada e Projetada

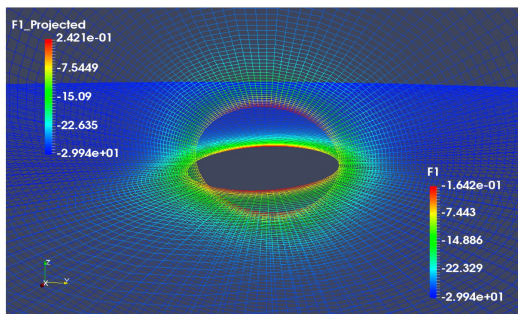


(a) Função de Escoamento, Inclinação = 45°, Direção = 30°

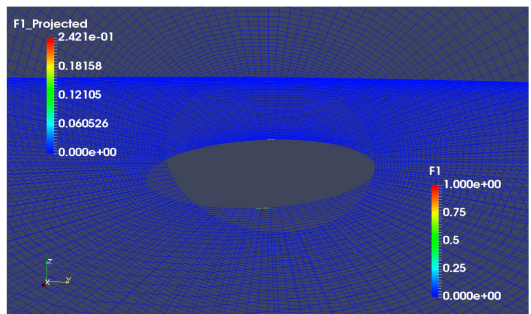


(b) Área Plastificada, Inclinação = 45°, Direção = 30°

Figura 82: Função de Escoamento Plástico de acordo com o Modelo Linear Elástico para um Poço com Inclinação de 45 graus e Direção de 30 graus - Visualização Inclinada e Projetada



(a) Função de Escoamento, Inclinação = 60°, Direção = 30°



(b) Área Plastificada, Inclinação = 60°, Direção = 30°

Figura 83: Função de Escoamento Plástico de acordo com o Modelo Linear Elástico para um Poço com Inclinação de 60 graus e Direção de 30 graus - Visualização Inclinada e Projetada

É possível observar que as áreas plastificadas nas seções inclinadas e projetadas se assemelham

no poços com inclinações de 15, 30, 45 e 60 graus.

Os resultados demonstram que, para um poço com as propriedades listadas, uma baixa pressão interna do poço (nesse caso 19.5 MPa) pode não satisfazer os limites de pressão da formação para um poço vertical, mas seu uso pode se enquadrar para um mesmo poço a depender de sua inclinação. Nota-se, por esses casos, que os poços inclinados podem necessitar de menor pressão interna de fluido quando comparado ao poço vertical.

## 14 Conclusão

O estudo do estado de tensões em poços de petróleo é fundamental em muitos aspectos da vida útil de um poço, tais como: no ganho da produção, no projeto de fraturamento hidráulico, na diminuição da produção de areia, e de maneira especial e com foco nessa pesquisa, no estudo da estabilidade durante a perfuração de poços inclinados. Para a minimização de problemas operacionais envolvendo instabilidade de poços, análises geomecânicas têm sido desenvolvidas a fim de prever o comportamento das rochas na fase de projeto dos poços.

O simulador apresentado neste projeto permite diferentes visões do campo de tensões do poço inclinado quando submetido à pressão exercida pelo fluido de perfuração. As visualizações inclinadas e projetadas, podem permitir convenientes análises no projeto de poços pelo Engenheiro e pelo Geólogo ampliando a visão das simulações e ainda assim utilizando baixa capacidade computacional, uma vez que o modelo é bidimensional.

Observou-se boa aproximação entre a solução aproximada e a solução analítica para poços inclinados apresentada na literatura. De modo a aumentar a acurácia da simulação, o usuário tem a possibilidade de aumentar a ordem polinomial da aproximação e/ou o número de elementos.

O estudo do erro de aproximação mostrou que o incremento no número de elementos circunferenciais, juntamente com a menor geometria do elemento na parede do poço e aproximação quadrática, apresenta melhores aproximações quando comparadas com a solução exata. O incremento no número de elementos radiais não apresentou variações no erro para o caso simulado. A solução numérica demonstrou taxas de convergência ótimas.

O critério de escoamento de Sandler-Dimaggio identificou áreas plastificadas ao redor do poço, permitindo a visualização do comportamento da rocha conforme a inclinação e direção do poço. A identificação da região plastificada torna-se uma importante ferramenta na fase de projeto de poços para prever instabilidades e ocorrências indesejáveis. Para o poço simulado neste estudo, observou-se que uma baixa pressão interna não era viável para um poço vertical, apresentando falha da formação, porém o critério mostrou que a mesma pressão interna poderia ser utilizada em um poço com os mesmos parâmetros a depender de sua inclinação, conforme observou-se no poço inclinado em 60 graus. Essas caracterizações de comportamento da formação em poços inclinados auxiliam no avanço do projeto e podem oferecer mais confiabilidade aos profissionais.

Pode-se concluir que a modelagem linear elástica apresentada neste estudo apresentou boa aproximação para a resposta elástica das formações em poços inclinados. As ferramentas disponibilizadas pelo simulador como a visualização inclinada e projetada, bem como o critério de escoamento de Sandler-Dimaggio, permitem visões ampliadas das soluções e contribuem para o desenvolvimento dos poços inclinados.

### **14.1 Trabalhos futuros**

O simulador permite melhorias para análises mais complexas considerando parâmetros como anisotropia, temperatura, tipo de fluido e adaptações para implementação de outros modelos como os elastoplásticos.

Para trabalhos futuros pode-se mencionar:

- A implementação de novos critérios de escoamento, aprimorando a resposta real das formações.
- O desenvolvimento de um modelo elastoplástico.
- A ampliação da capacidade do simulador para três dimensões, resultando em estudo ainda mais realista do estado tensões ao redor de poços inclinados.

## Referências

- [1] B. S. Aadnov, Rogaland U., and M. E. Chenevert. Stability of highly inclined boreholes. *Society of Petroleum Engineers*, (SPE/IADC 16052), March 1987.
- [2] M. Aslannezhad, A. K. Manshad, and H. Jalalifar. Determination of a safe mud window and analysis of wellbore stability to minimize drilling challenges and non-productive time. *Journal of Petroleum Exploration and Production Technology*, 2015.
- [3] C. Asszonyi and R. Richter. *The Continuum Theory of Rock Mechanics*, volume 4. Trans Tech Publications, United States of America, first edition, 1979.
- [4] E. B. Becker, G. F. Carey, and J. T. Oden. *Finite Elements: An Introduction*, volume 1. Prentice-Hall, Englewood Clifff, N.J. 07632, 1981.
- [5] Marco L. Bittencourt. *Computational Solid Mechanics: Variational Formulation and High Order Approximation*. CRC Press, 2014.
- [6] R.C. Bonelli. Técnica asr para medição de tensões in situ em poços de petróleo. Master's thesis, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2006.
- [7] Jr. A. T. Bourgoyne, K. K. Millheim, M. E. Chenevert, and Jr. F. S. Young. *Applied Drilling Engineering*, volume 2. Society of Petroleum Engineers, 1986.
- [8] Diogo Lira Cecílio. *Modelagem Elastoplástica Aplicada à Simulação Numérica da Estabilidade de Poços de Petróleo*. Tese de doutorado, Universidade Estadual de Campinas, Dezembro 2014.
- [9] Philippe A. Charlez. *Rock Mechanics*, volume 1. Editions Technip, 27 Rue Ginoux 75737 Paris Cedex 15, 1991.
- [10] R. D. Cook, D. S. Malkus, M. E. Plesha, and R. J. Witt. *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. John Wiley and Sons, Inc, fourth edition, 2002.
- [11] L. Cui, A.H, D. Cheng, D. Leshchinsky, Y. Abousleiman, and J.-C.Roegiers. Stability analysis of an inclined borehole in an isotropic poroelastic medium. *Rock Mechanics: Proceedings of the 35th US Symposium on Rock Mechanics*, (90 54 10 552 6), 1995.

- [12] E. A. de Souza Neto, D. Peric, and D. J. Owen. *Computacional Methods for Plasticity*. John Wiley and Sons Ltd, 2008.
- [13] H. M. Deitel and P. J. Deitel. *C++: Como Programar*. Pearson Prentice Hall, fifth edition, 2006.
- [14] Y. Y. Deryugin and G. V. Lasko. Field of stresses in an isotropic plane with circular inclusion under tensile stress. *Scientific Research*, July 2012.
- [15] Yevgenii Yevgen'evich Deryugin and Galina Vasil'evna Lasko. Field of stresses in an isotropic plane with circular inclusion under tensile stress. *Scientific Research*, pages 583–584, September 2012.
- [16] Philippe Remy Bernard Devloo. Pz: An object environment for scientific programming. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 150:133–153, 1997.
- [17] E. Fjar, R. M. Holt, A.M. Raaen, R. Risnes, and P. Horsrud. *Petroleum Related Rock Mechanics*. Number 978-0-444-50260-5. Elsevier, 2nd edition, 2008.
- [18] Tiago Luís Duarte Forti. *Aplicações dos Métodos de Elementos Finitos Contínuo e Galerkin Descontínuo Combinados*. Tese de doutorado, Universidade Estadual de Campinas, 2010.
- [19] Ali A. Garrouch and Abdullah S. Ebrahim. Assesment of the stability of inclined wellbores. *Society of Petroleum Engineers*, (SPE 68861), March 2001.
- [20] Phillip L. Gould. *Introduction to Linear Elasticity*. Springer-Verlag, 175 Fifth Avenue, New York, NY 10010, USA, second edition, 1989.
- [21] Morton E. Gurtin. *An Introduction to Continuum Mechanics*. Academica Press, 2003 edition, 1970.
- [22] W. M. Lai, D. Rubin, and E. Krempl. *Introduction to continuum mechanics*. Butterworth-Heinemann Ltd, third edition, 1993.
- [23] Tianshou Ma and Ping Chen. Wellbore stability analysis of inclined wells in the ay field. *Electronic Journal of Geotechnical Engineering*, 20, 2015.

- [24] A. K. Manshad, H. Jalalifar, and M. Aslannejad. Analysis of vertical, horizontal and deviated wellbores stability by analytical and numerical methods. *Journal of Petroleum Exploration and Production Technology*, January 2014.
- [25] George E. Mase. *Theory and Problems of Continuum Mechanics*. McGraw-Hill, 1970.
- [26] University of Auckland Website. <http://homepages.engineering.auckland.ac.nz>, 2016.
- [27] University of Colorado Website. <http://ceae.colorado.edu>, 2016.
- [28] University of Lisbon Website. <https://fenix.tecnico.ulisboa.pt>, 2016.
- [29] M. Ostadhassan, H. Jabbari, S. Zamiran, A. Osouli, B. Oster, and N. Lentz. Wellbore instability of inclined wells in highly layered rocks - bakken case study. *Society of Petroleum Engineers*, (SPE-171026-MS):21–23, Outubro 2014.
- [30] Raymond Parnes. *Solid Mechanics in Engineering*. Number 978-0-471-49300-6. John Wiley and Sons Ltd, Chichester, United Kingdom, 2001.
- [31] J. N. Reddy. *Finite Element Method*. McGraw-Hill, third edition, 2006.
- [32] Fernando L. B. Ribeiro. Introdução ao método dos elementos finitos. Technical report, COPPE/UFRJ, 2004.
- [33] L. A. S. Rocha, D. Aruaga, R. Andrade, J. L. B. Vieira, and O. L. A. Santos. *Perfuração Direcional*. Interciência, 2008.
- [34] Luiz Alberto Santos Rocha and Cecilia Toledo de Azevedo. *Projetos de Poços de Petróleo*. Interciência, 2nd edition, 2007.
- [35] Jose Ballardo Villegas Salabarría. Modelagem em elementos finitos de escoamento axissimétrico bifásico compressível. Master’s thesis, Universidade Estadual de Campinas, 2016.
- [36] Erick Slis Raggio Santos. *Simulador de meios porosos saturados elastoplásticos*. PhD thesis, UNICAMP, 2009.
- [37] José Eduardo Thomas. *Fundamentos da Engenharia de Petróleo*. Editora Interciência, 2001.
- [38] Maxwell Puc-Rio Website. <http://www.maxwell.vrac.puc-rio.br/10376/>, 2016.



- [39] Petrowiki Website. <http://petrowiki.org>, 2016.
- [40] RigZone Website. <http://www.rigzone.com>, 2016.
- [41] Solid Works Website. <http://help.solidworks.com>, 2016.
- [42] Statoil Website. <http://www.statoil.com>, November 2016.
- [43] Wikipedia. <https://www.wikipedia.org>, 2016.
- [44] G. Xu, H.-S. Yu, and D. J. Reddish. Numerical modelling of wellbore instability: a review. *Mining Science and Technology*, 2004.
- [45] Hao Yua, Zhanghua Liana, Tiejun Lina, and Kuanliang Zhub. Experimental and numerical study on casing wear in a directional well under in situ stress for oil and gas drilling. *Journal of Natural Gas Science and Engineering*, 35:986–996, Setembro 2016.
- [46] S. Zamiran, A. Osouli, and M. Ostadhassan. Geomechanical modeling of inclined wellbore in anisotropic shale layers of bakken formation. *American ROck Mechanics Association*, (ARMA 14-7422), June 2014.
- [47] A. Zervos, P. Papanastasiou, and J. Cook. Elastoplastic finite element analysis of inclined wellbores. *Society of Petroleum Engineers*, (SPE/ISRM 47322), July 1998.
- [48] Jincal Zhang. Borehole stability analysis accounting for anisotropies in drilling to weak bedding planes. *Internacional Journal of Rock Mechanics Mining Sciences*, 60:160–170, 2013.

## 15 Apêndice

### 15.1 Notação Matricial

Para o caso plano, tem-se as seguintes definições:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix}$$

$$\text{div}(\boldsymbol{\sigma}) = \begin{pmatrix} \frac{\delta \sigma_{xx}}{\delta x} + \frac{\delta \tau_{xy}}{\delta y} \\ \frac{\delta \tau_{yx}}{\delta x} + \frac{\delta \sigma_{yy}}{\delta y} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$

$$\nabla \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \frac{\delta v_x}{\delta x} & \frac{\delta v_x}{\delta y} \\ \frac{\delta v_y}{\delta x} & \frac{\delta v_y}{\delta y} \end{pmatrix}$$

$$(\nabla \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}^T \nabla \mathbf{v}) = \sigma_{xx} \frac{\delta v_x}{\delta x} + \tau_{xy} \left( \frac{\delta v_x}{\delta y} + \frac{\delta v_y}{\delta x} \right) + \sigma_{yy} \frac{\delta v_y}{\delta y}$$

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{n}} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} n_x + \tau_{xy} n_y \\ \tau_{xy} n_x + \sigma_{yy} n_y \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{n}} = v_x (\sigma_{xx} n_x + \tau_{xy} n_y) + v_y (\tau_{xy} n_x + \sigma_{yy} n_y)$$

## 15.2 Coeficiente de Poisson

Experimentos de laboratório mostram que as deformações  $\epsilon_y$  e  $\epsilon_z$ , para um material linear elástico, são proporcionais a  $\epsilon_x$ . Onde:

$$\epsilon_y = -\nu\epsilon_x \quad (150)$$

$$\epsilon_z = -\nu\epsilon_x \quad (151)$$

Então  $\nu$ , coeficiente de Poisson, pode ser dado como:

$$\nu = -\frac{\epsilon_{radial}}{\epsilon_{axial}} \quad (152)$$

## 15.3 Desprezando o efeito da gravidade

A Figura 84 exibe a variação da densidade conforme a porosidade das seguintes rochas: arenito (sandstone), dolomita (dolomite) e calcário (limestone).

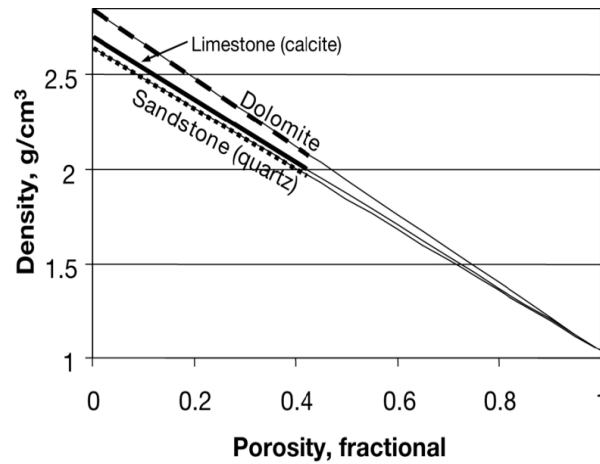


Figura 84: Densidade x Porosidade do arenito, dolomita e calcário, obtido de [39]

A variação na pressão de sobrecarga ( $P_r$ ), para densidade da rocha de  $\rho_r = 2.5 \text{ g/cm}^3$  de um arenito e inclinação de 45 graus para uma malha de 2 metros, conforme Figura 85, é dada por:

$$P_r = \rho_r g h = 2500 \left( \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3} \right) 9.81 \left( \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) 2(\text{m}) \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 34683.6 \text{ Pa ou } 34.68 \text{ KPa} \quad (153)$$

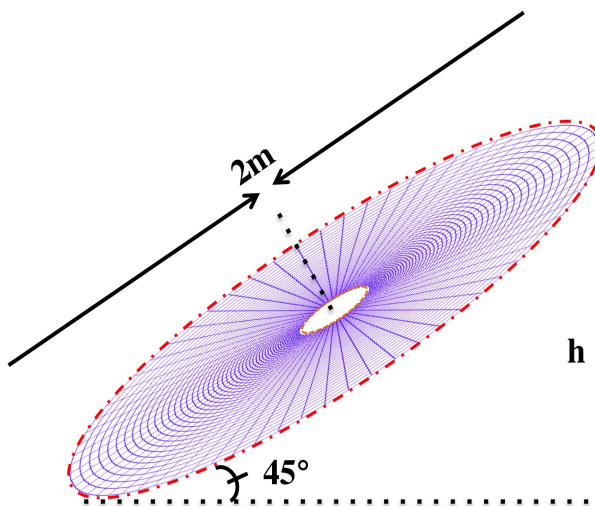


Figura 85: Esquema de malha inclinada a 45 graus

#### 15.4 Propriedades mecânicas de rochas

As tabelas 8 e 9 apresentam os módulos de elasticidade/módulo de Young ( $E$ ) e coeficientes de Poisson ( $\nu$ ) das nove rochas mais comuns.

	Granite	Basalt	Gneiss	Schist	Quartzite	Marble	Limestone	Sandstone	Shale
Av. E	59.3	62.6	58.6	42.4	70.9	46.3	50.4	15.3	13.7
Max. E	75.5	100.6	81.0	76.9	100.0	72.4	91.6	39.2	21.9
Min. E	26.2	34.9	16.8	5.9	42.4	23.2	7.7	1.9	7.5
Range	49.3	65.7	64.2	71.0	57.6	49.2	83.9	37.3	14.4
No. of samples	24	16	17	18	10	16	29	18	9

Tabela 8: Valores típicos de módulo de Young das rochas mais comuns (em GPa). Obtido de [27]

	Granite	Basalt	Gneiss	Schist	Quartzite	Marble	Limestone	Sandstone	Shale
Av. v	0.23	0.25	0.21	0.12	0.15	0.23	0.25	0.24	0.08
Max. v	0.39	0.38	0.40	0.27	0.24	0.40	0.33	0.46	0.18
Min. v	0.10	0.16	0.08	0.01	0.07	0.10	0.12	0.06	0.03
Range	0.29	0.22	0.32	0.26	0.17	0.30	0.21	0.40	0.15
No. of samples	24	16	17	18	10	16	29	18	9

Tabela 9: Valores típicos de coeficiente de Poisson das rochas mais comuns. Obtido de [27]